Доклады Академии Наук СССР
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS

МАТЕМАТИКА

Академик И. М. ВИНОГРАДОВ

О ПРИБЛИЖЕНИЯХ ПОСРЕДСТВОМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ, ИМЕЮЩИХ ЗНАМЕНАТЕЛЕМ ТОЧНУЮ СТЕПЕНЬ

В моей работе „Аналитическое доказательство теоремы о распределении дробных частей целого многочлена“ (1) доказана теорема:

Пусть n целое >1 и ε произвольно малое положительное постоянное. Существует такое L, зависящее только от n, что при любом $Q>1$ и вещественном α можно удовлетворить системе неравенств

$$|\alpha z^n - m| < LQ^{-\rho},$$
$$0 < z < Q,$$

где

$$\rho = \frac{n}{n2^{n-1}+1} - \varepsilon,$$

целыми z и m.

В настоящей работе я показываю, что эту оценку можно существенно улучшить, а именно вместо указанного выше значения ρ здесь я даю при $n \geqq 10$

$$\rho = \frac{1}{15n^2 \lg 10n},$$

что с возрастанием n убывает несравненно медленнее, чем указанное выше, и лучше его уже начиная с $n=15$.

Я применяю метод, который уже неоднократно применялся в моих последних работах (2). Этот метод можно применить и к решению более общих вопросов того же типа. Полученные здесь результаты можно значительно улучшить.

1. Обозначения. n целое $\geqq 10$;

$$\nu = \frac{1}{n}; \quad k = [n \lg 10n + 1]; \quad \lambda = \frac{1}{k}; \quad \sigma = (1-\nu)^k;$$
$$r = 2k^2; \quad \delta = \frac{2}{15n^2 \lg 10n}; \quad \mu = \frac{n\delta}{5}.$$

$c, c_1, \ldots$ постоянные, зависящие только от n.

$\theta, \theta_1, \ldots$ числа, модуль которых не превосходит 1.

$A \ll B$ или $B \gg A$ при положительном B обозначает, что $|A| \leqq cB$.

Если z вещественное, то (z) обозначает расстояние z до ближайшего целого.

α вещественное;

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}; \quad (a, q) = 1; \quad q > 0;$$
$$\Delta = q^{-\delta}; \quad M = [\Delta^{-1-\lambda}];$$
$$P = P_1 = \left[\left(\frac{q}{2}\right)^{\nu}\right]; \quad P_2 = \left[\frac{1}{2} M^{-\nu} P_1^{1-\nu}\right]; \quad \ldots; \quad P_k = \left[\frac{1}{2} M^{-\nu} P_{k-1}^{1-\nu}\right].$$

Нетрудно видеть, что

$$k \geqq 4.6n; \quad M \ll q^{\frac{\nu^2}{22}}; \quad P_k \gg q^{\frac{\nu^2}{32}}; \quad \sigma < \frac{\nu}{10};$$
$$P_1 \ldots P_k \gg M^{-k+n-n\sigma} q^{1-\sigma}.$$

Предполагается что $q \geqq c_0$, где c_0 достаточно велико.

2. Оценка модуля одной тригонометрической суммы. Пусть $m_1, \ldots, m_k$ определенные положительные целые $\leqq M$, числа же

$$x_1, \ldots, x_k, y$$

независимо друг от друга пробегают значения

$$x_s = P_s, \quad P_s + 1, \ldots, 2P_s = 1,$$
$$y = 1, \ldots, P.$$

Нетрудно видеть, что числа

$$\xi = m_1 x_1^n + \ldots + m_k x_k^n$$

друг на друга не налегают, каждое из них не превосходит Mq и их количество равно

$$P_1 \ldots P_k.$$

Находим

$$\sum_y \left| \sum_\xi e^{2\pi i \alpha y^n \xi} \right| \leqslant \sqrt{P P_1 \ldots P_k \sum_{u=-Mq}^{Mq} \left| \sum_y e^{2\pi i \alpha y^n u} \right|}$$

$$\sum_u \left| \sum_y e^{2\pi i \alpha y^n u} \right| \leqslant \sqrt{Mq \sum_h \min\left(Mq, \frac{1}{(\alpha h)}\right)};$$

$$h = y^n - y_1^n.$$

Замечая, что

$$-\frac{q}{2} < h < \frac{q}{2}; \quad \alpha h = \frac{ah}{q} + \frac{\theta h}{q^2} = \frac{ah}{q} + \frac{\theta'}{2q}$$

и что число решений неопределенного уравнения

$$y^n - y_1^n = h$$

будет $\leqslant P$, легко найдем:

$$\sum_y \left| \sum_\xi e^{2\pi i \alpha y^n \xi} \right| \leqslant P^{\frac{3}{4}} \sqrt{P_1 \ldots P_k \, Mq}.$$

3. Особая периодическая функция. Пусть β вещественное. Существует периодическая функция $\psi(z)$ с периодом 1, обладающая следующими свойствами:

$$0 \leqq \psi(z) \leqq 1 \quad \text{в интервалах} \quad m + \beta - \Delta \leqq z \leqq m + \beta + \Delta,$$

где m любое целое.

$$\psi(z) = 0 \quad \text{в остальных интервалах.}$$

При этом $\psi(z)$ разлагается в ряд Фурье вида

$$\psi(z) = \Delta + \varphi(z); \quad \varphi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos 2\pi m z + B_m \sin 2\pi m z),$$

где

$$A_m \leqslant \Delta; \quad B_m \leqslant \Delta; \quad \text{если } m \leqq \Delta^{-1};$$
$$A_m \leqslant \frac{1}{\Delta^r m^{r+1}}; \quad B_m \leqslant \frac{1}{\Delta^r m^{r+1}}, \quad \text{если } m > \Delta^{-1}.$$

4. Вывод основной теоремы. Положим

$$S_{y,s}=\sum_{x_s}\varphi(\alpha y^n x_s^n);\quad s=1,\ldots,k;$$

$$S=\sum_{y}\left|S_{y,1}\ldots S_{y,k}\right|.$$

Нетрудно видеть, что оценка модуля суммы S сводится к оценке модуля сумм вида

$$R=\sum_{m_1}\cdots\sum_{m_k}D_{m_1}\ldots D_{m_k}T;\quad T=\sum_{y}\left|\sum_{\xi}e^{2\pi i\alpha y^n\xi}\right|,$$

где при каждой данной системе значений $m_1,\ldots,m_k$ число ξ пробегает значения

$$\xi=m_1x_1^n+\ldots+m_kx_k^n,$$

причем числа x_s пробегают значения пункта 2. Числа D_{m_s} удовлетворяют условиям

$$D_{m_s}=\Delta,\quad\text{если } m_s\leqq\Delta^{-1};$$

$$D_{m_s}=\frac{1}{\Delta^r m^{r+1}},\quad\text{если } m_s>\Delta^{-1}.$$

Согласно пункту 2 в случае, когда все m_s не превосходят M, имеем

$$T\ll P^{\frac{3}{4}}\sqrt{P_1\ldots P_k\,Mq}.$$

Если же хоть одно m_s превосходит M, можно применить очевидную оценку

$$T\ll PP_1\ldots P_k.$$

Принимая во внимание указанные выше оценки для D_{m_s} и неравенство

$$\sum_{m_s>M}|D_{m_s}|\ll\sum_{m_s>M}\frac{1}{\Delta^r m_s^{r+1}}\ll\Delta^{2k},$$

легко найдем

$$R\ll P^{\frac{3}{4}}\sqrt{P_1\ldots P_k\,Mq}+PP_1\ldots P_k\Delta^{2k}\ll$$
$$\ll PP_1\ldots P_k\Delta^k q^{-\mu}.$$

Вместе с тем окажется:

$$S\ll PP_1\ldots P_k\Delta^k q^{-\mu}.$$

Следовательно, по крайней мере при одном значении y будет

$$S_{y,1}\ldots S_{y,k}\ll P_1\ldots P_k\Delta^k q^{-\mu},$$

и потому имеется по крайней мере одно такое S, что

$$S_{y,s}\ll P_s\Delta q^{-c_1};\quad c_1=\frac{\mu}{k},$$

откуда

$$\sum_{x_s}\psi(x_s)-\Delta P_s\ll\Delta q^{-c_1}.$$

Это доказывает существование такого $c_2 \geqq c_0$, что при всех $q \geqq c_2$ будем иметь

$$\sum_{x_s} \psi(x_s) \gg \Delta P_s,$$

то есть имеется по крайней мере одно такое $x = x_s$, что

$$\psi(\alpha y^n x^n) > 0.$$

А это показывает, что

$$\alpha (xy)^n = m + \beta + \theta_1 \Delta,$$

где m целое. Замечая, что

$$1 \leqq xy \leqq q^{2\nu},$$

мы можем найденный результат формулировать так:

Теорема. *Пусть β вещественное. Можно указать такое c', что, представляя любое вещественное α в форме*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}; \quad (a, q) = 1,$$

можно удовлетворить системе неравенств

$$|\alpha z^n - \beta - m| < c' q^{-\delta},$$
$$0 < z < q^{2\nu}$$

целыми z и m.

Следует отметить, что эта теорема верна, и вывод ее мало изменится, если например будем считать, что в произведении $z = xy$ числа x и y являются простыми.

5. Следствия. В частности положим $\beta = 0$. Каково бы ни было $Q \geqq 1$, число α можно представить в форме

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}; \quad (a, q) = 1; \quad 0 < q \leqq \tau; \quad \tau = Q^{\frac{n}{2}}.$$

При $q > \sqrt{Q}$ имеем неравенства

$$|\alpha z^n - m| < c' Q^{-\rho}; \quad \rho = \frac{\delta}{2} = \frac{1}{15n^2 \lg 10n};$$
$$0 < z < Q. \tag{1}$$

При $q \leqq \sqrt{Q}$ мы удовлетворим тем же неравенствам, если положим

$$z = q; \quad m = aq^{n-1}.$$

А это и доказывает теорему, указанную в начале работы.

Неравенства (1) можно также переписать в форме

$$\left|\alpha - \frac{m}{z^n}\right| < \frac{c'}{z^n Q^\rho}; \quad 0 < z < Q,$$

что дает оценку приближения к числу α некоторой дробью, знаменатель которой точная n-ая степень.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
29 III 1935.

MATHÉMATIQUES

SUR L'APPROXIMATION AU MOYEN DES FRACTIONS RATIONNELLES DONT LES DÉNOMINATEURS SONT DES PUISSANCES DE NOMBRES ENTIERS

Par I. M. VINOGRADOW, de l'Académie

RÉSUMÉ

Dans le présent travail l'auteur donne l'application de ses résultats récents à l'approximation d'un nombre compris entre 0 et 1 au moyen des parties fractionnaires de l'expression

$$\alpha x^n.$$

En particulier l'auteur démontre le theorème suivant:

Soit n un entier ≥ 10. Il existe alors une constante L, dépendant seulement du nombre n, telle que pour un $Q > 1$ quelconque et un α réel on peut trouver des entiers z et m qui vérifient les inégalités

$$|\alpha z^n - m| < LQ^{-\rho},$$

$$0 < z < Q,$$

où

$$\rho = \frac{1}{15n^2 \lg 10n}.$$

Institut mathématique W. Stekloff.
Académie des Sciences de l'URSS.
Moscou.

Manuscrit reçu
le 29. III. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITTÉRATURE CITÉE

[1] ИАН, 1927. Bull. Acad. Sci. URSS, 1927. [2] ДАН, 1934, т. II, № 6; т. IV, № 1, т. IV, № 5-6. C. R. Acad. Sci. URSS, 1934, v. II, № 6; v. IV, № 1; v. IV, № 5-6.

МАТЕМАТИКА

В. С. ИГНАТОВСКИЙ, член-корреспондент Академии Наук СССР

ПО ПОВОДУ ЛАПЛАСОВСКОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

§ 1. Тут не место входить в подробности о функциональной трансформации, получаемой при помощи лапласовской трансформации. По поводу этого мы отсылаем к работам Дёча (Doetsch), приведенным в его обзоре (1). Перевод дифференциального уравнения из „верхней области" (Oberraum) в „нижнюю" (Unterraum) и после решения его в этой области обратный перевод в верхнюю область представляет метод, который, между прочим, заменяет собою символический метод Хевисайда (Heaviside)* и вместе с тем подводит под него математическое основание.

Однако не надо думать, что цель функционального метода есть обоснование символики Хевисайда, так как первый идет значительно дальше второго, и наконец мы, вместе с Дёчем (3), можем сказать, что „совершенно излишне пользоваться выражениями и методом символики, так как функциональный метод так же краток, но зато значительно содержательнее".

* По этому поводу мы отсылаем к критике Дёча книги Карсона (2) и к последней работе Дёча (3).

Последнее время я подробно занимался лапласовской трансформацией и из моих результатов хочу здесь сообщить некоторые, касающиеся интегрирования одного дифференциаьного уравнения с частными производными.

§ 2. Дано следующее дифференциальное уравнение с частными производными для функции $u(x, t)$:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_1\frac{\partial u}{\partial t} + a_1\frac{\partial u}{\partial x} + mu = \varphi(x, t). \tag{1}$$

При этом c, c_1, a_1 действительно постоянные величины, и кроме того $c > 0$. $\varphi(x, t)$ — некоторая данная функция.

Мы обозначим:

$$u(0, t) = u_0(t); \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = h(t); \qquad x = 0. \tag{2}$$

$$u(x, 0) = f(x); \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = F(x); \qquad t = 0. \tag{3}$$

Требуется найти решения уравнения (1) при $x > 0$ и $t > 0$.

Начальные и граничные условия определяются заданием соответственных функций (2) и (3).

Сказывается, что лишь т р и из этих функций могут быть заданы произвольно. Четвертая определяется на основании трех остальных.

Таким образом мы имеем ч е т ы р е различных решения уравнения (1).

Приведем сначала решение, соответствующее случаю, когда даны обе функции (3) и первая из функций (2). Введем следующие обозначения:

$$\nu = -\frac{a_1}{2}; \qquad \mu = \frac{c_1 c^2}{2}; \qquad \nu^2 = m - \frac{c_1^2 c^2}{4} + \frac{a_1^2}{4} \tag{4}$$

и

$$M(x, y) = I_0\left(\nu\sqrt{x^2 - y^2 c^2}\right), \tag{5}$$

причем I_0 означает функцию Бесселя для мнимого аргумента.

Искомое решение будет

$$\begin{aligned} u(x, t) = {} & \frac{1}{2}e^{-t(\mu-\nu c)}\{f(tc + x) - e^{-2\nu x}f(tc - x)\} + u_0\left(t - \frac{x}{c}\right)e^{-x\left(\frac{\mu}{c}+\nu\right)} - \\ & - ce^{-\nu x}\int_{\frac{x}{c}}^{t} u_0(t - y)\,e^{-\mu y}\frac{\partial M(x, y)}{\partial x}\,dy + \\ & + \frac{e^{-\mu t}}{2c}\int_{-tc}^{x} e^{-\nu y}\left[\{F(x - y) + \mu f(x - y)\}M(y, t) + f(x - y)\frac{\partial M(y, t)}{\partial t}\right]dy - \\ & - \frac{e^{-\mu t - 2\nu x}}{2c}\int_{x}^{tc} e^{\nu y}\left[\{F(y - x) + \mu f(y - x)\}M(y, t) + f(y - x)\frac{\partial M(y, t)}{\partial t}\right]dy + \\ & + \frac{c}{2}\int_{0}^{\frac{x}{c}} e^{-y\mu}\,dy\int_{-yc}^{yc}\varphi(x - s, t - y)\,e^{-\nu s}M(s, y)\,ds + \\ & + \frac{c}{2}\int_{\frac{x}{c}}^{t} e^{-y\mu}\,dy\int_{-yc}^{x}\varphi(x - s, t - y)\,e^{-\nu s}M(s, y)\,ds + \\ & + \frac{ce^{-2\nu x}}{2}\int_{\frac{x}{c}}^{t} e^{-y\mu}\,dy\int_{yc}^{x}\varphi(s - x, t - y)\,e^{\nu s}M(s, y)\,ds, \qquad \underline{x < tc.} \end{aligned} \tag{6}$$

и
$$u(x,\,t)=\frac{1}{2}e^{-\mu t}\{f(x-tc)\,e^{-\nu tc}+f(x+tc)\,e^{+\nu tc}\}+$$
$$+\frac{e^{-\mu t}}{2c}\int\limits_{-tc}^{tc}e^{-\nu y}\left[\{F(x-y)+\mu f(x-y)\}\,M(y,\,t)+f(x-y)\,\frac{\partial M(y,\,t)}{\partial t}\right]dy+ \qquad (7)$$
$$+\frac{c}{2}\int\limits_{0}^{t}e^{-\mu y}\,dy\int\limits_{-yc}^{yc}e^{-\nu s}\,\varphi(x-s,\,t-y)\,M(s,\,y)\,ds, \qquad \underline{x>tc.}$$

Функции $u_0(t)$, $f(x)$ и $F(x)$ заданы для аргументов >0 (для аргументов <0 они равны нулю) и там кусочно-гладкие и интегрируемы до нуля. Кроме того мы полагаем первые две функции непрерывными. Для $F(x)$ это последнее требование не обязательно.

На основании этих условий, из хода решения получается, что
$$u_0(+0)-f(+0)=0. \qquad (8)$$

Таким образом (8) показывает, что, хотя каждая из функций $u_0(t)$ и $f(x)$ в отдельности не определена для аргумента нуль, но разность их, при этом, исчезнет.

Отсюда непосредственно следует то важное обстоятельство, что (6), в чем легко убедиться, при $x=tc$ переходит, вследствие (8), в (7), т. е. получается непрерывность между (6) и (7).

При этом мы должны указать на работу Сбрана (Sbrana) ([4]), который решает уравнение (1) при $a_1=\varphi(x,\,t)=0$ и при заданных $u_0(t)$, $f(x)$ и $F(x)$. Мы не можем здесь останавливаться на разборе решения Сбрана, укажем лишь, что он пользуется символическим методом. Для $x>ct$ его решение соответствует выражению (7). Для $x<ct$ он не приводит решения в окончательной форме.

Что касается зависимости (8), то у Сбрана она не является следствием решения, но принимается им заранее, а также принимается заранее, что три функции $u_0(t)$, $f(x)$ и $F(x)$ однозначно определяют решение.

Также и Сбрана указывает на непрерывность между (6) и (7) при $x=ct$, как следствие выражения (8).

§ 3. Мы переходим теперь к случаю, когда даны функции
$$u_0(t), \quad f(x) \quad \text{и} \quad h(t).$$

Относительно этих функций мы делаем те же предположения, как в § 2 относительно $u_0(t)$, $f(x)$ и $F(x)$, причем лишь $h(t)$ здесь поставлено на месте $F(x)$. Зависимость (8) будет выполняться и в этом случае.

Как решение мы получим
$$u(x,\,t)=\frac{1}{2}e^{-\nu x}\left\{u_0\left(t-\frac{x}{c}\right)e^{-\frac{x\mu}{c}}+u_0\left(t+\frac{x}{c}\right)e^{+\frac{x\mu}{c}}\right\}+$$
$$+\frac{ce^{-\nu x}}{2}\int\limits_{-\frac{x}{c}}^{\frac{x}{c}}e^{-\mu y}\left[\{h(t-y)+\nu u_0(t-y)\}\,M(x,\,y)+u_0(t-y)\,\frac{\partial M}{\partial x}(x,\,y)\right]dy-$$
$$-\frac{c}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x}{c}}e^{-\mu y}\,dy\int\limits_{yc}^{x}e^{-\nu s}\,\varphi(x-s,\,t-y)\,M(s,\,y)\,ds+ \qquad (9)$$
$$+\frac{c}{2}\int\limits_{0}^{-\frac{x}{c}}e^{-\mu y}\,dy\int\limits_{-yc}^{x}e^{-\nu s}\,\varphi(x-s,\,t-y)\,M(s,\,y)\,ds, \qquad \underline{x<tc.}$$

II

$$u(x,t)=f(x-tc)\,e^{-t(\mu+\nu c)}+\frac{1}{2}\,e^{-x\left(\nu-\frac{\mu}{c}\right)}\left\{u_0\left(\frac{x}{c}+t\right)-e^{-2\mu t}\,u_0\left(\frac{x}{c}-t\right)\right\}-$$

$$-\frac{e^{-\mu t}}{c}\int_{tc}^{x}e^{-\nu y}\,f(x-y)\,\frac{\partial M}{\partial t}(y,t)\,dy+$$

$$+\frac{c}{2}\,e^{-\nu x}\int_{-\frac{x}{c}}^{t}e^{-\mu y}\left[\left\{h(t-y)+\nu u_0(t-y)\right\}M(x,y)+u_0(t-y)\,\frac{\partial M}{\partial x}(x,y)\right]dy-$$

$$-\frac{c}{2}\,e^{-2\mu t-\nu x}\int_{t}^{\frac{x}{c}}e^{\mu y}\left[\left\{h(y-t)+\nu u_0(y-t)\right\}M(x,y)+u_0(y-t)\,\frac{\partial M}{\partial x}(x,y)\right]dy+ \qquad (10)$$

$$+\frac{c}{2}\,e^{-2\mu t}\int_{t}^{\frac{x}{c}}e^{\mu y}\,dy\int_{cy}^{x}\varphi(x-s,y-t)\,e^{-\nu s}\,M(s,y)\,ds-$$

$$-\frac{c}{2}\int_{-\frac{x}{c}}^{t}e^{-\mu y}\,dy\int_{-yc}^{x}\varphi(x-s,t-y)\,e^{-\nu s}\,M(s,y)\,ds+$$

$$+\frac{c}{2}\int_{0}^{t}e^{-\mu y}\,dy\int_{-yc}^{yc}\varphi(x-s,t-y)\,e^{-\nu s}\,M(s,y)\,ds; \qquad \underline{x>tc.}$$

И здесь мы имеем, вследствие (8), непрерывность между (9) и (10) при $x=ct$.

§ 4. После того как решение, с помощью перехода в нижнюю область и потом обратного перехода, при помощи известного комплексного интеграла, было определено, можно было составить некоторые выражения, скажем A, связывающие величины (2) и (3) между собою.

Определяя из A напр. $h(t)$ и введя в полученное решение, пока, очевидно, содержащее все четыре функции (2) и (3), мы получим выражения, (6) и (7). Если же из A определить $F(x)$, то получатся выражения (9) и (10). Если же ввести эти значения $F(x)$ в (6) и (7), то мы перейдем к выражениям (9) и (10) и наоборот из последних при введении вышеозначенной величины $h(t)$ переходим к (6) и (7).

Таким образом мы видим, что упомянутые в § 2 четыре решения теснейшим образом связаны между собою и могут быть переведены одно в другое. Они составляют вместе, так сказать, группу.

После этого перейдем к выражению (7). При $F(x)=f(x)=\varphi(x,t)=0$ правая часть (7) исчезнет. Это при $x>ct$ с физической точки зрения вполне понятно, так как правая сторона зависит лишь от таких величин, которые даны для $x>0$ уже при $t=0$.

Совершенно другой результат мы получаем из (10). При

$$f(x)=\varphi(x,t)=0,$$

правая часть не исчезнет и зависит от $u_0(t)$ и $h(t)$, т. е. от величин, определяющих краевые условия (при $x=0$). С физической точки зрения это означает, что $u(x,t)$, хотя и исчезает при $t=0$ (при $f(x)=\varphi(x,t)=0$), но для $t>0$, в общем, всюду отлично от нуля при $x>ct$.

Это объясняется тем, что в данном случае $F(x)\neq 0$. Исчезновение последней величины означало бы новое добавочное физическое условие.

Что бы избежать этого, можно было бы просто в (10) выбросить все члены, зависящие от $u_0(t)$ и $h(t)$ [они ведь являются интегралами однородного уравнения (1)]. Вместе с тем сохранится и начальное условие

$$u(x, 0) = f(x).$$

Однако в этом случае (9) и (10), с одной стороны, и (6) и (7), с другой, не образуют более группы, и непрерывность между (9) и (10) при $x = ct$ исчезнет, что напр. для случая струны означает разрыв последней.

Кроме того всплывает вопрос об однозначности решения, которая у нас автоматически выполняется.

Ленинград.

Поступило
21 I 1935.

MATHEMATIK

ZUR LAPLACE-TRANSFORMATION

Von V. S. IGNATOVSKIJ (W. v. IGNATOWSKY),

korrespondierendem Mitglied der Akademie

§ 1. Es ist an dieser Stelle nicht möglich die Funktionaltransformation, die durch die Laplace-Transformation bewerkstelligt wird, genauer zu besprechen. Hierzu verweise ich auf die Arbeiten von Doetsch, die in seinem Bericht (1) zusammengestellt sind. Die Überführung der Differentialgleichung vom Oberbereich in den Unterbereich und, nach der Lösung dort, die Rückkehr in den Oberbereich, stellt eine Methode dar, welche unter anderem den symbolischen Heaviside-Kalkül ersetzt.* Zugleich gibt sie dem letzteren eine mathematische Begründung. Man denke aber nicht, dass letzteres der Zweck obiger Methode ist, denn die Funktionaltransformation geht bedeutend weiter und ausserdem ist es jetzt, um mit Doetsch zu sprechen „vollkommen überflüssig sich der Sprache und Rechnungsweise der Symbolik zu bedienen, da die Sprache der Funktionaltransformation ebenso kurz, aber viel sachhaltiger ist".

Ich befasste mich die letzte Zeit eingehend mit der Laplace-Transformation und möchte hier von meinen Resultaten einiges über die Integration einer partiellen Differentialgleichung mitteilen.

§ 2. Es sei die partielle Differentialgleichung (6) für die Funktion $u(x, t)$ vorgelegt. Hierbei sind c, c_1, a_1, m reelle Konstanten und es sei ausserdem $c > 0$. $\varphi(x, t)$ ist eine vorgegebene Funktion.

Gesucht werden Lösungen von (1) bei $x > 0$ und $t > 0$.

Die Rand- und Anfangsbedingungen sind durch die Angabe der entsprechenden Funktionen (2) und (3) bestimmt.

Es ergibt sich nun, dass nur drei von diesen Funktionen willkürlich gegeben sein dürfen. Die vierte bestimmt sich dann eindeutig mit Hilfe der drei gegebenen anderen.

Demnach haben wir also vier verschiedene Lösungen der Gleichung (1). Wir wollen nun zuerst diejenige Lösung hinschreiben, welche dem Fall entspricht, dass beide Funktionen (3) und die erste Funktion (2) gegeben sind.

* Hierzu verweisen wir auf die Kritik von Doetsch des Buches von Carson (2) und auf die letzte Arbeit von Doetsch (3).

Nach Einführung der Abkürzungen (4) und (5), wobei I_0 die Besselsch Funktion, für imaginäres Argument bedeutet, erhalten wir als Lösung den Ausdruck (6) bei $x < ct$ und den Ausdruck (7) bei $x > ct$.

Die Funktionen $u_0(t)$, $f(x)$ und $F(x)$ sind für Argumente > 0 definiert für Argumente < 0 sind sie gleich Null), und dort stückweise glatt und bis zu Null integrierbar. Die beiden ersten Funktionen sollen dort ausserdem stetig sein. Für $F(x)$ ist diese letzte Forderung nicht notwendig.

Bei diesen Bedingungen ergibt sich aus dem Gang der Lösung, dass die Beziehnng (8) gelten wird. Obwohl also jede der Funktionen $u_0(t)$ und $f(x)$ für die Nullwerte ihrer Argumente nicht definiert zu sein braucht, muss ihre Differenz (8) dabei verschwinden.

Wir müssen sogleich auf den wichtigen Umstand aufmerksam machen, dass (6), wie man sich sofort unmittelbar überzeugen kann, für $x = ct$, wegen (8), in (7) übergeht, d. h. auf die Stetigkeit zwischen (6) und (7).

Bei dieser Gelegenheit möchte ich auf eine Arbeit von Sbrana [4] hinweisen, welcher die Gleichung (1) bei $a_1 = \varphi(x, t) = 0$ und gegebenen $u_0(t)$, $f(x)$ und $F(x)$ behandelt. Wir können hier nicht auf die Diskussion der Lösung von Sbrana eingehen und bemerken nur, dass er dabei eine symbolische Methode anwendet. Für $x > ct$ stimmt seine Lösung mit dem entsprechenden Ausdruck (7) überein. Für $x > ct$ gibt er die Lösung nicht in endgültiger Form an.

Die Beziehung (8) ergibt sich bei Sbrana nicht aus dem Gang der Lösung, sondern wird von ihm von vornherein angenommen, desgleichen auch, dass die Lösung eindeutig durch die drei Funktionen $u_0(x)$, $f(x)$ und $F(x)$ bestimmt ist. Auch Sbrana weisst auf die Stetigkeit, bei $x = ct$, zwischen (6) und (7) hin, als Folge von (8).

§ 3. Nun wollen wir den Fall behandeln, dass $u_0(t)$, $f(x)$ und $h(t)$ gegeben sind. Bezüglich dieser Funktionen machen wir dieselben Annahmen, wie in § 2 über $u_0(t)$, $f(x)$ und $F(x)$, nur dass dabei $h(t)$ an Stelle von $F(x)$ tritt. Hier wird ebenfalls die Bedingung (8) gelten.

Als Lösung erhalten wir den Ausdruck (9) für $x < ct$ und den Ausdruck (10) für $x > ct$. Auch hier haben wir, wegen (8), stetigen Übergang von (9) zu (10), bei $x = ct$.

§ 4. Nachdem die Lösung durch Übergang in den Unterraum und dann durch Rückgang, mit Hilfe des bekannten komplexen Integrals, in den Oberraum gefunden war, liessen sich Beziehungen, sagen wir A, bilden, die die vier Grössen (2) und (3) miteinander verbinden.

Bestimmen wir nun aus A, z. B. die Funktion $h(t)$ und führen sie dann in die gewonnene Lösung, die ja vorläufig alle vier Funktionen (2) und (3) enthält, ein, so erhalten wir die Ausdrücke (6) und (7). Berechnen wir weiter aus A die Grosse $F(x)$, so ergeben sich aus der Lösung die Ausdrücke (9) und (10). Setzen wir nun aber diesen Wert für $F(x)$ in (6) und (7) ein, so gelangen wir zu den Ausdrücken (9) und (10) und umgekehrt ergeben sich aus diesen, durch Einsetzen des oben erwähnten Ausdruckes für $h(t)$ die Gleichungen (6) und (7).

Wir sehen also, dass die in § 2 genannten vier Lösungen aufs engste miteinander verbunden sind und ineinander übergefürt werden können.

Sie bilden zusammen, gewissermassen, eine Gruppe.

Dies vorausgeschickt, wenden wir uns jetzt zu dem Ausdruck (7). Bei $F(x) = f(x) = \varphi(x, t) = 0$, verschwindet die rechte Seite hiervon. Diese ist physikalisch bei $x > ct$ einleuchtend, denn die rechte Seite hängt ja nur von solchen Grössen ab, die schon bei $t = 0$, längs $x > 0$ gegeben sind.

Zu einem ganz anderen Resultat gelangen wir bei (10). Für

$$f(x) = \varphi(x, t) = 0$$

verschwindet hier die rechte Seite nicht, sondern wird von $u_0(t)$ und $h(t)$ abhängen, also von Grössen, die die Randbedingungen ($x = 0$) bestimmen. Physikalisch bedeutet dies, dass obwohl für $t = 0$, $u(x, t)$ verschwindet (bei $f(x) = \varphi(x, t) = 0$), es aber für $t > 0$, im allgemeinen, bei $x > ct$ überall von Null verschieden sein wird. Dieses erklärt sich dadurch, dass hierbei $F(x) \neq 0$ ist. Das Verschwinden dieser Grösse würde eine neue physikalische Bedingung vorstellen.

Um diese Verhältnisse zu umgehen, könnte man einfach in (10) alle Glieder, die von $u_0(t)$ und $h(t)$ abhängen streichen [sie stellen ja ein Integral der homogenen Gleichung (1) dar]. Zugleich bleibt dabei die Anfangsbedingung $u(x, 0) = f(x)$ erhalten.

Dann bilden aber (9) und (10) mit (6) und (7), nach dem Obigen, keine Gruppe mehr und die Stetigkeit zwischen (9) und (10) bei $x = ct$ ist geschwunden. Dies würde z. B. bei einer Saite, das Zerreissen der letzteren bedeuten. Anderseits käme dann die Frage der Eindeutigkeit der Lösung in Betracht, welche ja bei uns automatisch eingehalten wird.

Leningrad.

Eingegangen
d. 21. I. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] G. Doetsch, Jahresber. d. deutsch. Mathematiker-Vereinigung, Bd. 36, 1927, S. 1—30. [2] G. Doetsch, Ebenda, Bd. 39, 1930, S. *105—109* Lit. [3] G. Doetsch, Ebenda, Bd. 43, 1934, S. 238—251. [4] F. Sbrana, Mem. del. Accad. dei Lincei, ser. VI, vol. V, 1933, p. 221—251.

МАТЕМАТИКА

Л. П. РАДЗИШЕВСКИЙ

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(*Представлено академиком С. Н. Бернштейном 9 I 1935*)

Как показал Ф. Рисс (1), безаппаратная теория Фредгольма справедлива для уравнений вида

$$x = f + \lambda T[x] \qquad (1)$$

где x и f непрерывные функции, λ — комплексный параметр, T — линейный вполне непрерывный (vollstetig) оператор. Теория, развитая Ф. Риссом, была затем усовершенствована и распространена на пространства более общие Гильдебрандтом, Банахом и др. (2). В предыдущей нашей заметке (3) мы упомянули, что теория Фредгольма может быть распространена на уравнения (1) при еще более общих условиях.

Положим, что оператор T не вполне непрерывен, но что его можно разложить на два линейных оператора u и v, где u вполне непрерывен. Следуя Ф. Риссу, обозначим через M положительное число, для которого

$$\|v[x]\| \leqq M \cdot \|x\| \qquad (2)$$

при любом x рассматриваемого пространства. Обозначим через m нижнюю границу множества чисел M, получающихся при всевозможных разложениях T на операции типа u и v.

Можно утверждать, что по крайней мере внутри круга

$$|\lambda| \cdot m < 1 \qquad (3)$$

для уравнения (1) справедлива безаппаратная теория Фредгольма. Действительно, рассмотрим уравнение

$$x = \Phi + \lambda L[x], \qquad (4)$$

где

$$\Phi = f + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j v^j [f] \quad \text{и} \quad L[x] = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} v^{j-1} u[x], \qquad (5)$$

причем v^j и vu обозначают соответственно степень и произведение операций. Если λ находится внутри круга (3), то Φ имеет ограниченный норм, и операция L линейна и вполне непрерывна.

Заметим что

$$\Phi = f + \lambda v[\Phi] \quad \text{и} \quad L[x] = u[x] + \lambda v L[x]. \qquad (6)$$

Подставляя (1) в (4) и (4) в (1) и принимая во внимание (6), легко убедиться, что уравнения (1) и (4) эквивалентны в смысле решений с ограниченным нормом, что и доказывает наше утверждение.

В частности, если $m = 0$, то круг (3) покрывает всю комплексную плоскость параметра λ, в этом случае операция T вполне непрерывна.

Следует вообще отметить, что линейная операция T будет вполне непрерывной, если из нее можно выделить операцию v, имеющую норм, меньший сколь угодно малого положительного наперед заданного числа, и если при этом в остатке остается каждый раз вполне непрерывная операция u. Указанное условие, являющееся необходимым и достаточным, оказывается во многих случаях практически полезным признаком для обнаружения полной непрерывности операции T.

Иногда в известном смысле можно говорить о распространении теории Фредгольма даже вне круга (3).

Действительно, положим, что мы нашли такую операцию $R[x]$, для которой $T - R$ вполне непрерывна. Рассмотрим уравнение

$$S[\lambda, x] = y,$$

где

$$S[\lambda, x] = x - \lambda R[x] \quad \text{и} \quad y = f + \lambda T[x] - \lambda R[x]. \qquad (7)$$

Легко видеть, что для области тех значений λ, для которых операция S обратима, справедлива также и теория Фредгольма. Указанная область может выступать за пределы круга (3); наиболее простым здесь является тот случай, когда указанной областью оказывается вся комплексная плоскость параметра λ за исключением лишь некоторых точек.

Поступило
9 I 1935.

ZUR ALLGEMEINEN THEORIE DER LINEAREN FUNKTIONALGLEICHUNGEN

Von L. P. RADZIŠEVSKIJ (RADSISCHEWSKY)

(*Vorgelegt von S. N. Bernstein, Mitglied der Akademie, d. 9. I. 1935*)

Die determinantenfreie Theorie von I. Fredholm ist bekanntlich, wie es F. Risz (1) nachgewiesen hat, auf Gleichungen von der Art von

$$x = f + \lambda T[x] \tag{1}$$

anwendbar, wo x und f stetige Funktionen sind, λ ein komplexer Parameter und T eine lineare vollstetige Operation ist.

Diese Behandlung der Frage wurde hernach von Hildebrandt, S. Banach (2) u. a. vertieft und auf allgemeinere Räume erweitert. In unserem letzten Artikel (3) haben wir darauf hingewiesen, dass sich die determinantenfreie Theorie von I. Fredholm unter noch allgemeineren Bedingungen auf die Gleichungen (1) ausdehnen lässt.

Nehmen wir an, dass T eine lineare, jedoch keine vollstetige Operation ist; möge T dabei in zwei lineare Operationen u und v zerlegbar sein, wo u vollstetig ist.

Wir bezeichnen, wie üblich, mit M eine solche positive Zahl, für welche

$$\|v[x]\| \leqq M \cdot \|x\| \tag{2}$$

ausfällt, bei beliebigem x des zu betrachtenden Raumes. Mit m bezeichnen wir die untere Schranke der Menge der bei allen erwähnten Zerlegungen von T zu erhaltenden Zahlen M.

Wir behaupten, dass mindestens innerhalb des Kreises

$$|\lambda| \cdot m < 1 \tag{3}$$

die determinantenfreie Theorie von I. Fredholm für die Gleichungen (1) gültig ist. Wollen wir die Gleichung

$$x = \Phi + \lambda L[x] \tag{4}$$

betrachten, wo

$$\Phi = f + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j v^j[x]$$

und

$$L[x] = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} v^{j-1} u[x] \tag{5}$$

ist, wobei Σ, vu und v^j, wie üblich, Summe, Produkt und Potenz der Operationen bezeichnen. Befindet sich λ im Inneren des Kreises (3), so ist Φ beschränkt und L linear und vollstetig. Zu bemerken ist, dass

$$\Phi = f + \lambda v[\Phi],$$

und

$$L[x] = u[x] + \lambda v L[x] \tag{6}$$

ist. Indem wir (1) in (4) und umgekehrt einsetzen und (6) berücksichtigen, können wir leicht ersehen, dass die Gleichungen (1) und (4) inbezug auf Lösungen mit beschränkten Normen äquivalent sind, was unsere Behauptung beweist.

Insbesondere umfasst der Kreis (3) bei $m=0$ die ganze Komplexebene des Parameters λ; jedoch ist in diesem Fall die Operation T vollstetig.

Überhaupt sei gesagt, dass die lineare Operation T vollstetig ist, wenn sich daraus eine Operation R mit einer beliebig klein gewählten Norm aussondern lässt und wenn dabei $u=T-R$ vollstetig ist. Diese Bedingung, die offensichtlich notwendig und hinreichend ist, erweist sich in vielen Fällen als praktisch geeignet, die Vollstetigkeit der Operation T nachzuweisen.

In einigen Fällen kann in gewissem Sinne von einer Erweiterung der Theorie von I. Fredholm auch ausserhalb des Kreises (3) die Rede sein.

Es möge eine Operation $R[x]$ vorliegen, für die $T-R$ vollstetig sei. Betrachten wir dann die Gleichung

$$S[x;\lambda]=y, \tag{7}$$

wo

$$S[x;\lambda]=x-\lambda R[x]$$

und

$$y=f+\lambda T[x]-\lambda R[x]$$

ist. Es ist klar, dass für das Gebiet der Parameterwerte, wo die Operation S eine Reziproke hat, auch die Theorie von I. Fredholm gelten muss. Dieses Gebiet kann auch über die Grenzen des Kreises (3) heraustreten; am einfachsten erscheint der Fall, wenn es die ganze Komplexebene des Parameters λ mit eventueller Ausnahme einzelner Punkte umfasst.

Eingegangen
d. 9. I. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] F. Risz, Acta Math., 1916—1918. [2] T. Hildebrandt, Acta Math., 1928. [3] S. Banach. Théorie des opérations linéaires, 1932. [4] Радзишевский, ДАН. 1934, т. IV, 364. Radziševskij, C. R. Acad. Sci. URSS, 1934, vol. IV, 368.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. Д. КУПРАДЗЕ

ОБОБЩЕННЫЙ „ПРИНЦИП ИЗЛУЧЕНИЯ“ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

(*Представлено академиком А. Н. Крыловым 27 II 1935*)

Как известно, краевую задачу стационарной теории упругости, с заданными смещениями на границе, можно ставить как задачу об интегрировании системы

$$\Delta\bar{\varphi}+s_1^2\bar{\varphi}=0,$$
$$\Delta\bar{\psi}+s_2^2\bar{\psi}=0, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\bar{\varphi}=0,\quad \operatorname{div}\bar{\psi}=0 \tag{2}$$

в области Ω,* ограниченной замкнутым контуром (γ) при условии на контуре:

$$[\bar{\varphi}+\bar{\psi}]_{(\gamma)}=f(s).$$

* Односвязной или многосвязной.

В формулах (1) и (2) $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ „поперечный“ и „продольный“ „составляющие“ вектора смещений $\bar{u}(u, v)$, а $s_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}$ и $s_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}$ суть квадраты величин обратных скоростям поперечных и продольных возмущений; ω частота колебаний в единицу времени, ρ плотность среды (λ, μ). Известно, что, если Ω простирается в бесконечность, поставленная выше краевая задача без дополнительных ограничений, накладываемых на бесконечности на искомые решения, не имеет единственного решения.

В этой работе я разыскиваю достаточное для единственности условие. Нетрудно проверить справедливость следующего равенства, принадлежащего Вольтера

$$\int_{(\gamma)} \{[u^* X_x + v^* X_y - u X_x^* - v X_y^*]\cos(nx) + [u^* X_y + v^* Y_y - u X_y^* - v Y_y^*]\cos(ny)\}\, ds = 0, \tag{3}$$

где

$$X_x = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial v}{\partial y}, \quad X_y = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad Y_y = (\lambda+2\mu)\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$X_x^* = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u^*}{\partial x} + \lambda\frac{\partial v^*}{\partial y}, \quad X_y^* = \mu\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x}\right), \tag{4}$$

$$Y_y^* = (\lambda+2\mu)\frac{\partial v^*}{\partial y} + \lambda\frac{\partial u^*}{\partial x},$$

$$u = \varphi_x + \psi_x, \; v = \varphi_y + \psi_y, \; u^* = \varphi_x^* + \psi_x^*, \; v^* = \varphi_y^* + \psi_y^*,$$

(u, v) и (u^*, v^*) два решения — уравнения $\frac{\rho\omega^2}{\mu} = \Delta\bar{u} + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\bar{u}$; $X_x \ldots Y_y^*$ составляющие напряжении, соответствующие этим решениям. Выбирая за $\varphi_x^*, \psi_x^*, \varphi_y^*, \psi_y^*$ согласно с (2) выражения:

$$\varphi_x^* = \frac{\partial}{\partial x} H_0^2(s_1 r), \quad \psi_x^* = \frac{\partial}{\partial y} H_0^2(s_2 r), \quad \varphi_y^* = \frac{\partial}{\partial y} H_0^2(s_1 r), \quad \psi_y^* = -\frac{\partial}{\partial x} H_0^2(s_2 r),$$

где $H_0^{(2)}(sr)$ функция Ганкеля 2-го рода, а $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, и подставляя их вместе с (4) в (3), получаем после достаточно длинных, но несложных преобразований и вычислений:

$$u(x_0, y_0) = -\frac{4i}{\rho\omega^2}\left(\frac{\partial I_\gamma}{\partial x} + \frac{\partial I_\Sigma}{\partial x} + \frac{\partial J_\gamma^*}{\partial y} + \frac{\partial J_\Sigma^*}{\partial y}\right),$$
$$v(x_0, y_0) = -\frac{4i}{\rho\omega^2}\left(\frac{\partial I_\gamma}{\partial y} + \frac{\partial I_\Sigma}{\partial y} - \frac{\partial J_\gamma^*}{\partial x} - \frac{\partial J_\Sigma^*}{\partial x}\right), \tag{5}$$

где I и J^* суть некоторые интегралы по (γ) и по (Σ), которая (Σ) представляет окружность очень большого радиуса R с центром в точке $(x_0 y_0)$.

Пользуясь асимптотическими формулами:

$$H_0^2(sR) = \sqrt{\frac{2}{sR}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-isR}, \quad H_1^2(sR) = i\sqrt{\frac{2}{sR}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-isR},$$

можно интегралам по Σ придать следующий вид:

$$J_\Sigma = -\lambda s_1 i \sqrt{\frac{2}{s_1 R}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\, e^{-is_1 R} \int_\Sigma \left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x} + is_1 u\cos(nx)\right] + \left[\frac{\partial v}{\partial y} + is_1 v\cos(ny)\right]\right\} ds -$$

$$- 2\mu s_1 i \sqrt{\frac{2}{s_1 R}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\, e^{-is_1 R} \int_\Sigma \left\{\cos(nx)\left[\frac{\partial u}{\partial n} + is_1 u\right] + \cos(ny)\left[\frac{\partial v}{\partial n} + is_1 v\right]\right\} ds +$$

$$+ \frac{2\mu s_1 H_1^2(s_1 R)}{R} \int_\Sigma [u\cos(nx) + v\cos(ny)]\, ds;$$

$$J_\Sigma^* = -\mu s_2 i \sqrt{\frac{2}{s_2 R}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\, e^{-is_2 R} \int_\Sigma \left\{\cos(ny)\left[\frac{\partial u}{\partial n} + is_2 u\right] - \cos(nx)\left[\frac{\partial v}{\partial n} + is_2 v\right]\right\} ds +$$

$$+ \mu s_2 H_1^2(s_2 R) \int_\Sigma \left\{\cos(ny)\left[\frac{\partial v}{\partial y}\cos(nx) - \frac{\partial v}{\partial x}\cos(ny)\right] -\right.$$

$$\left. - \cos(nx)\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(ny) - \frac{\partial u}{\partial y}\cos(nx)\right]\right\} ds +$$

$$+ \frac{2\mu s_2 H_1^2(s_2 R)}{R} \int_\Sigma [v\cos(nx) - u\cos(ny)]\, ds.$$

Из этих формул непосредственно видно, что если искомые решения удовлетворяют условию:

$$\lim_{R\to\infty} \sqrt{R}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial l} + is\Phi\cos(R, l)\right] = 0 \tag{6}$$

и

$$\lim_{R\to\infty} [\sqrt{R}\,\Phi], \tag{7}$$

остается ограниченным на бесконечности, интегралы I_Σ, J_Σ^*, дающие излучение из бесконечности в решениях (5), не будут присутствовать, и решение представится как сумма волн, расходящихся из источника и диффрагирующего контура (γ). Условие (6) мы и называем „обобщенным принципом излучения“.

В формуле (6) l произвольное направление, R радиус окружности Σ, на которой (6) имеет место, $s = s_1$ или s_2 в зависимости от поперечного или продольного характера Φ.

В частности, если l совпадает с R, из (6) получаем классический „принцип излучения“ А. Зоммерфельда для электромагнитных волн:

$$\lim_{R\to\infty} \sqrt{R}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} + is\Phi\right) = 0,$$

доказательство достаточности которого было дано нами в ДАН № 3, т. I, 1934 г.

В следующем сообщении будет показана достаточность условий (6) для единственности решения краевой, формулированной выше.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
27 II 1935.

DAS VERALLGEMEINERTE „AUSSTRAHLUNGSPRINZIP“ IN DER ELASTIZITÄTSTHEORIE

Von V. D. KUPRADZE

(*Vorgelegt von A. N. Krylov, Mitglied der Akademie, d. 27. II. 1935*)

Bekanntlich kann man die Randwertaufgabe der stationären Elastizitätstheorie mit gegebenen Grenzverschiebungen als Aufgabe der Integration des Systems

$$\Delta\bar{\varphi} + s_1^2\bar{\varphi} = 0, \qquad \Delta\bar{\psi} + s_2^2\bar{\psi} = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\bar{\varphi} = 0, \quad \operatorname{div}\bar{\psi} = 0 \tag{2}$$

in dem von einer geschlossenen Berandung (γ) begrenzten Bereich Ω^* mi der Bedingung am Rand

$$[\bar{\varphi} + \bar{\psi}]_{(\gamma)} = f(s).$$

stellen. In den Formeln (1) und (2) bedeuten $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ die „Quer“- und „Längskomponente“ des Verschiebungsvektors $\bar{u}(u, v)$, und $s_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}$, $s_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}$ sind die Quadrate der reziproken Grössen der Geschwindigkeiten der Longitudinal- und Transversalwelle; ω bedeutet die Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit, ρ die Dichte des Mediums (λ, μ). Es ist bekannt, dass wenn Ω sich bis in das Unendliche erstreckt, die oben gestellte Randucertaufgabe ohne ergänzende Einschränkungen, die im Unendlichen den gesuchten Lösungen auferlegt werden, keine eindeutige Lösung hat.

In dieser Arbeit suche ich nach der für die Eindeutigkeit hinreichenden Bedingung. Es ist nicht schwer, die Richtigkeit der Gleichung

$$\int_{(\gamma)} \{[u^* X_x + v^* X_y - uX_x^* - vX_y^*]\cos(nx) + [u^* X_y + v^* Y_y - uX_y^* - vY_y^*]\cos(ny)\}\, ds = 0, \tag{3}$$

nachzuprüfen, wobei

$$X_x = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial v}{\partial y}, \quad X_y = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad Y_y = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$X_x^* = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u^*}{\partial x} + \lambda\frac{\partial v^*}{\partial y}, \quad X_y^* = \mu\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x}\right), \tag{4}$$

$$Y_y^* = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v^*}{\partial y} + \lambda\frac{\partial u^*}{\partial x},$$

$$u = \varphi_x + \psi_x, \quad v = \varphi_y + \psi_y, \quad u^* = \varphi_x^* + \psi_x^*, \quad v^* = \varphi_y^* + \psi_y^*;$$

(u, v) und (u^*, v^*) zwei Lösungen von $-\frac{\rho\omega^2}{\mu}\bar{u} = \Delta\bar{u} + \frac{\lambda + \mu}{\mu}$ grad div $\bar{u}$ sind und $X, \ldots Y_y^*$ die Komponenten, aus denen sich die Spannungen zusammensetzen, die diesen Lösungen entsprechen.

* Einfach oder mehrfach zusammenhängend.

Wenn man für φ_x^*, ψ_x^*, φ_y^*, ψ_y^* nach Gleichung (2) die Ausdrücke

$$\varphi_x^* = \frac{\partial}{\partial x} H_0^2(s_1 r), \quad \psi_x^* = \frac{\partial}{\partial y} H_0^2(s_2 r),$$
$$\varphi_y^* = \frac{\partial}{\partial y} H_0^2(s_1 r), \quad \psi_y^* = -\frac{\partial}{\partial x} H_0^2(s_2 r)$$

wählt, wobei $H_0^2(sr)$ die Hankelsche Funktion 2. Art ist und

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

und wenn man diese Grössen zusammen mit (4) in (3) einsetzt, so erhält man nach ziemlich langen, aber unkomplizierten Umformungen und Berechnungen:

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= -\frac{4i}{\rho\omega^2}\left(\frac{\partial I_\gamma}{\partial x} + \frac{\partial I_\Sigma}{\partial x} + \frac{\partial J_\gamma^*}{\partial y} + \frac{\partial J_\Sigma^*}{\partial y}\right), \\ v(x_0, y_0) &= -\frac{4i}{\rho\omega^2}\left(\frac{\partial I_\gamma}{\partial y} + \frac{\partial I_\Sigma}{\partial y} - \frac{\partial J_\gamma^*}{\partial x} - \frac{\partial J_\Sigma^*}{\partial x}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Hierbei bedeuten I und J^* gewisse Integrale längs γ und (Σ), wobei (Σ) einen Kreis mit sehr grossem Radius R und Mittelpunkt (x_0, y_0) darstellt.

Wenn man die asymptotischen Formeln

$$H_0^2(sR) = \sqrt{\frac{2}{sR}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-isR}, \quad H_1^2(sR) = i\sqrt{\frac{2}{sR}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-isR}$$

benutzt, kann man die Integrale längs (Σ) folgendermassen umformen:

$$\begin{aligned} J_\Sigma = &-\lambda s_1 i \sqrt{\frac{2}{s_1 R}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-is_1 R} \int_\Sigma \left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x} + is_1 u\cos(nx)\right] + \left[\frac{\partial v}{\partial y} + is_1 v\cos(ny)\right]\right\} ds - \\ &- 2\mu s_1 i \sqrt{\frac{2}{s_1 R}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-is_1 R} \int_\Sigma \left\{\cos(nx)\left[\frac{\partial u}{\partial n} + is_1 u\right] + \cos(ny)\left[\frac{\partial v}{\partial n} + is_1 v\right]\right\} ds + \\ &+ \frac{2\mu s_1 H_1^2(s_1 R)}{R} \int_\Sigma [u\cos(nx) + v\cos(ny)]\, ds; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_\Sigma^* = &-\mu s_2 i \sqrt{\frac{2}{s_2 R}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-is_2 R} \int_\Sigma \left\{\cos(ny)\left[\frac{\partial u}{\partial n} + is_2 u\right] - \cos(nx)\left[\frac{\partial v}{\partial n} + is_2 v\right]\right\} ds + \\ &+ \mu s_2 H_1^2(s_2 R) \int_\Sigma \left\{\cos(ny)\left[\frac{\partial v}{\partial y}\cos(nx) - \frac{\partial v}{\partial x}\cos(ny)\right] - \right. \\ &\left. - \cos(nx)\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(ny) - \frac{\partial u}{\partial y}\cos(nx)\right]\right\} ds + \\ &- \frac{2\mu s_2 H_1^2(s_2 R)}{R} \int_\Sigma [v\cos(nx) - u\cos(ny)]\, ds. \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln geht unmittelbar hervor, dass, falls die gesuchten Lösungen der Bedingung

$$\lim_{R\to\infty} \sqrt{R}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial l} + is\Phi\cos(R, l)\right] = 0 \tag{6}$$

genügen, und falls

$$\lim_{R\to\infty} [\sqrt{R}\,\Phi] \tag{7}$$

im Unendlichen beschränkt bleibt, die Integrale I_Σ und J_Σ^*, die die Ausstrahlung aus dem Unendlichen darstellen, in den Lösungen (5) nicht enthalten sein werden, und dass die Lösung sich als Summe von Wellen darstellen wird, die von der Quelle und diffragierenden Berandung γ aus auseinandergehen.

Die Bedingungen (6) nennen wir das „Verallgemeinerte Ausstrahlungsprinzip". In den Formeln (6) bedeutet l eine beliebige Richtung, R den Radius der Kreislinie Σ, auf der die Gleichung (6) gilt; es ist $s=s_1$ oder $s=s_2$, je nachdem Φ Längs- oder Quercharakter hat.

Im besonderen Fall des Zusammenfallens von l mit R aus (6) erhalten wir das klassische „Ausstrahlungsprinzip" von A. Sommerfeld für elektromagnetische Wellen, von dem wir in den C. R. Acad. Sci. URSS, № 3, vol. I, 1934, bewiesen haben, dass es hinreichend ist.

Die Beweis dafür, dass die Bedingung (6) hinreichend für die Eindeutigkeit der oben erwähnten Randwertaufgabe ist, wir in der nächsten Mitteilung erbracht werden.

Stekloffsches mathematisches Institut.
Akademie der Wissenschaften der UdSSR.
Moskau.

Eingegangen
d. 27.II.1935.

ГИДРОДИНАМИКА

Л. С. ЛЕЙБЕНЗОН, член-корреспондент Академии Наук СССР

К ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Будем отсчитывать координату x по обтекаемому контуру от точки разветвления, а координату y по нормали к этому контуру. Компонент скорости параллельно x обозначим через u, плотность через ρ, скорость потенциального обтекания через $u_0(x)$.

Пусть $\delta_1(x)$ есть толщина подстилающего ламинарного подслоя, а $\delta_2(x)$ есть полная толщина турбулентного слоя, включая в него и ламинарный подслой. Распределение скоростей в ламинарном подслое принимаем пока в виде:

$$u_1 = v\left[A\left(\frac{y}{\delta_1}\right) - B\left(\frac{y}{\delta_1}\right)^2 + C\left(\frac{y}{\delta_1}\right)^k\right], \tag{1}$$

где $k \geqslant 3$.

Здесь v есть скорость на границе обоих слоев.

Очевидно, для $y=\delta_1$ получим

$$A - B + C = 1. \tag{2}$$

Условие Стокса

$$u_1 = 0 \quad \text{для} \quad y = 0$$

удовлетворено само собою. Остается условие Польгаузена для перехода давления:

$$\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = -\rho u_0 u_0' \quad \text{при} \quad y=0, \tag{3}$$

$$u_0' = \frac{du_0}{dx}, \qquad \mu - \text{абсолютная вязкость.}$$

Распределение скоростей в турбулентном слое дано законом Прандтля-Кармана

$$u_2 = u_0\left(\frac{y}{\delta_2}\right)^m. \tag{4}$$

На границе обоих слоев имеется условие

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_2 = v \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{aligned}\right\} \text{ для } \quad y = \delta_1. \tag{5}$$

Сверх того имеет место условие для силы трения

$$\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)_{y=0} = \alpha \rho u_0^2 \left(\frac{\nu}{u_0 \delta_0}\right)^n, \tag{6}$$

$$n = \frac{2m}{m+1},$$

причем для $m = \frac{1}{7}$ имеем $\alpha = 0.0225$.

Для случая плоской пластинки имеем

$$u_0 = \text{const}, \quad u_0' = 0,$$

что дает легко

$$B = 0, \qquad A = \frac{k-m}{k-1}, \qquad C = \frac{m-1}{k-1}.$$

Отсюда легко получить

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = E \left(\frac{\nu}{u_0 \delta_2}\right)^{\frac{1}{m+1}}, \tag{7}$$

$$E = \left[\frac{k-m}{\alpha (k-1)}\right]^{\frac{1}{m+1}}.$$

Таким образом отношение δ_1/δ_2 не зависит от k.

Величина E для $m = \frac{1}{7}$ заключена в пределах

$$76 < E < 127. \tag{8}$$

Так как

$$v = u_0 (\delta_1/\delta_2)^m, \tag{9}$$

то из (7) и (9) получим

$$v = \frac{u_0 E^m}{\left(\frac{u_0 \delta_2}{\nu}\right)^{\frac{m}{m+1}}}. \tag{10}$$

С другими целями частный случай (1) при

$$B = C = 0$$

был рассмотрен Л. Прандтлем [1].

В случае кривой пластинки простая формула (7) уже не имеет места, и отношение δ_1/δ_2 вычисляется из более сложного уравнения как функция x, u_0, u_0'. Из теории турбулентного слоя получается известное соотношение

$$\frac{u_0 \delta_2}{\nu} = \gamma \left(\frac{u_0 x}{\nu}\right)^{\frac{m+1}{3m+1}}, \tag{11}$$

$$\gamma = \left[\frac{\alpha (3m+1)^2}{m}\right]^{\frac{m+1}{3m+1}},$$

причем для $m = \frac{1}{7}$ имеем $\gamma = 0.38$.

Из (10) и (11) получим

$$v = u_0 \eta \left(\frac{\nu}{u_0 x}\right)^{\frac{m}{3m+1}}; \qquad \eta = \frac{E^m}{\gamma^{\frac{m}{m+1}}}, \tag{12}$$

для $m = \frac{1}{7}$ имеем $\eta = 2.25$.

В приложениях можно считать, что скорость $v(x)$ на границе ламинарного и турбулентного слоев дана формулой (12) по известной скорости $u_0(x)$ потенциального обтекания и прилагать приближенно эту формулу и к обтеканию криволинейных контуров. Очевидно, что максимум давления потенциального обтекания уже не будет соответствовать максимуму давления в ламинарном подслое, как это имеет место в случае обычного ламинарного слоя. Применяя формулу (12) к обтеканию круглого цилиндра радиуса a, имеем

$$u_0 = 2w \sin\theta. \tag{13}$$

Внося (13) в (12), получим при $m = \frac{1}{7}$ $(D = 2a)$

$$v = \eta_0 w \frac{(\sin\theta)^{0.9}}{(\theta)^{0.1}}; \qquad \eta_0 = \frac{4.5}{\left(\frac{wD}{\nu}\right)^{0.1}}. \tag{14}$$

Взяв производную по θ, получим уравнение

$$\operatorname{tag}\theta = 9\theta,$$

откуда определим место максимума давления $\theta = 85°45'$. Оно близко к значению $\theta = 85°$, полученному Fage в своих опытах для вполне развитого турбулентного обтекания при $w = 22.4$ м/сек. Точка отрыва турбулентного слоя может быть определена по способу проф. В. В. Голубева (см. работу Рахматулина) путем применения условия отрыва Прандтля к ламинарному подслою, т. е. из условия

$$\frac{dv}{dy} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \tag{15}$$

Применяя наш метод (²), вводим функцию

$$\varphi(t) = \eta t^{0.8}(1 - 0.97t)$$

и получаем для $n = -\frac{1}{2}$

$$t = \sin^2\frac{\theta}{2} = 0.646;$$

откуда $\theta = 107°$ (приблизительно). Эта цифра близка к полученной Fage для упомянутого случая $\theta = 105°$. Вычисление по методу Польгаузена дает $\theta = 104°$ (приблизительно). При вычислении силы трения можно пользоваться обычной формулой Блазиуса, внося туда вместо скорости u_0 скорость v. Учет существования ламинарного подслоя приводит к более сложной формуле для силы трения при обтекании пластинки. К этим вопросам мы вернемся.

Поступило
21 III 1935.

HYDRODYNAMICS

ON THE THEORY OF THE TURBULENT BOUNDARY LAYER

By L. S. LEIBENSON, Corresponding Member of the Academy

SUMMARY

In the case of the steady motion of a liquid streaming past a plane lamina we determine by formula (7) the relation of the thickness of the laminar layer δ_1 to the total thickness of the whole layer δ_2 (including δ_1).

The velocity at the boundary of the laminar sublayer is determined by formula (10). From (10) and (11) we obtain the final value (12) for the velocity v at the boundary of the laminar sublayer.

Using this formula for the case of the flow around a circular cylinder, we can determine $\frac{u_0 \delta_2}{\nu}$ from formula (14). We obtain maximum pressure for $\theta = 85°45'$. The breaking point of the boundary layer is calculated from condition (15). The calculation gives us $\theta = 107°$. These values of θ are close to that obtained by Fage for $w = 22.4$ m/sec.

Received
21. III. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

[1] Prandtl. Hydro- und Aeromechanik, Bd. II, S. 93. [2] Л. С. Лейбензон, Мат. сборн., т. 41, вып. 2.

ГИДРОДИНАМИКА

Л. С. ЛЕЙБЕНЗОН, член-корреспондент Академии Наук СССР

ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ФОРМА ИНТЕГРАЛЬНОГО УСЛОВИЯ В ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Предложенное профессором Т. Карманом интегральное условие в теории пограничного слоя выводится из теоремы о количестве движения ([1]). Вместо того, применяя теорему живых сил, мы получим, при тех же обозначениях и приближениях, новую форму интегрального условия. Для ламинарного пограничного слоя имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\delta}\frac{1}{2}\rho u^2\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta}\frac{1}{2}\rho u^3\,dy - \frac{1}{2}\rho u_0^2\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} u\,dy = \\ = -\mu\int_0^{\delta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy - \frac{\partial p}{\partial x}\int_0^{\delta} u\,dy. \qquad (1)$$

Здесь координата x отсчитывается по обтекаемому контуру от точки разветвления (при входе), координата y направлена по нормали к нему. Компонент скорости параллельно x обозначен через u, гидродинамическое давление через p, через δ — толщина пограничного слоя, μ — коэффициент абсолютной вязкости, ρ — плотность жидкости, ν есть кинематическая вязкость, t — время, u_0 — скорость потенциального обтекания.

Для случая плоской пластинки принимаем для установившегося ламинарного слоя:

$$u = u_0 f(z), \qquad z = \frac{y}{\delta}, \qquad u_0 = \text{const}, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

На функцию $f(z)$ налагаются условия

$$\begin{gathered} f = 0, \qquad \frac{df}{dz} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \\ \frac{df}{dz} = 0 \quad \text{при} \quad z = 1. \end{gathered} \tag{3}$$

Уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{d\delta}{dx}\left[\int_0^1 (f - f^3)\, dz\right] = \frac{2\mu}{\rho u_0 \delta} \int_0^1 \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz, \tag{4}$$

что может быть представлено в виде:

$$2\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\mu \varepsilon^{II}}{\rho u_0}, \tag{5}$$

если ввести обозначение

$$\varepsilon^2 = \frac{4 \int_0^1 \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz}{\int_0^1 (f - f^3)\, dz}. \tag{6}$$

Интегрируя уравнение (5) при условии

$$\delta = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,$$

получим:

$$\delta = \varepsilon \sqrt{\frac{\mu x}{\rho u_0}}. \tag{7}$$

Сила трения τ определится из формулы

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0},$$

которая на основании (2) приводится к виду:

$$\tau = \frac{\mu u_0}{\delta} \left(\frac{df}{dz}\right)_{z=0}. \tag{8}$$

Как приложение теории имеем:

1) $f = \frac{3}{2} z - \frac{1}{2} z^3$,

откуда по (7) и (8) имеем:

$$\delta = 4.75 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho u_0}}; \qquad \tau = 0.315 \sqrt{\frac{\mu \rho u_0^2}{x}}.$$

2) $f = 2z - 3z^3 + z^4$,

откуда по (7) и (8) имеем:

$$\delta = 5.67 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho u_0}}; \qquad \tau = 0.353 \sqrt{\frac{\mu \rho u_0^2}{x}}.$$

2) $f = \sin \frac{\pi z}{2}$,

откуда по (7) и (8)

$$\delta = 4.79 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho u_0}}; \qquad \tau = 0.327 \sqrt{\frac{\mu \rho u_0^2}{x}}.$$

Вычисление Блазиуса дает

$$\tau = 0.332 \sqrt{\frac{\mu \rho u_0^3}{x}}.$$

Для стационарного турбулентного пограничного слоя имеет место уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \frac{1}{2}\rho u^3\,dy - \frac{1}{2}\rho u_0^2\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u\,dy = -\tau_0 u_0 - \frac{\partial p}{\partial x}\int_0^\delta u\,dy,$$
$$\tau_0 = 0.0225\rho u_0^2\left(\frac{\nu}{\delta u_0}\right)^{1/4}. \qquad (10)$$

Для плоской пластинки имеем:

$$u_0 = \text{const}, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad u = u_0\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}.$$

Полная сила трения на пластинке длины L имеет величину

$$W = \frac{1}{2}\rho u_0^2 L\frac{0.0706}{\sqrt[5]{\frac{Lu_0}{\nu}}}. \qquad (11)$$

Для поверхности вращения имеем для ламинарного пограничного слоя

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^\delta ru^3\,dy - u_0^2\frac{\partial}{\partial s}\int_0^\delta ru\,dy =$$
$$= -2\nu\int_0^\delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 r\,dy - \frac{2}{\rho}\frac{dp}{ds}\int_0^\delta ru\,dy, \qquad (12)$$

а для турбулентного пограничного слоя:

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^\delta ru^3\,dy - u_0^2\frac{\partial}{\partial s}\int_0^\delta ru\,dy = -2ru_0\tau_0 - \frac{2}{\rho}\frac{dp}{ds}\int_0^\delta ru\,dy, \qquad (12')$$

здесь r — расстояние от оси вращения, y направлено по нормали к поверхности, ds — элемент дуги меридиана.

Поступило
21 III 1935.

HYDRODYNAMICS

THE ENERGY FORM OF THE INTEGRAL CONDITION IN THE THEORY OF THE BOUNDARY LAYER

By L. S. LEIBENSON, Corresponding Member of the Academy

SUMMARY

According to the principle of vis viva we obtain for the laminar boundary layer a new form of the integral condition (1). For the steady motion of a liquid streaming past a plane lamina we obtain equation (4), which is calculated by Pohlhausen's method and gives for the force of friction a quantity that is very near to Blasius's formula.

For the steady turbulent boundary layer we obtain an analogous new condition (10), from which the force of friction may be calculated according to formula (11). For the boundary layer on the solid of revolution formulae (12) and (12′) hold.

Received
21. III. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

[1] Handbuch d. Physik, t. VIII, SS. 124 u. 156.

ФИЗИКА

А. В. МИТКЕВИЧ

ВЛИЯНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СОТРЯСЕНИЙ НА ПОСЛЕДУЮЩИЕ ПРОЯВЛЕНИЯ МАГНИТНОЙ ВЯЗКОСТИ

(*Представлено академиком В. Ф. Миткевичем 10 III 1935*)

1. До настоящего времени высказываются самые разнообразные мнения относительно причин, обусловливающих магнитную вязкость. Иногда даже магнитная вязкость рассматривается и как необходимое следствие токов Фуко, возникающих в массе ферромагнитного материала. Однако, как я уже показала раньше ([1, 2, 3]), проявление магнитной вязкости в некоторых случаях может сопровождаться такими изменениями магнитной индукции, что они не поддаются объяснению с точки зрения сколь угодно сложного задерживающего влияния токов Фуко.

Есть полное основание рассматривать магнитную вязкость в качестве результата того, что энергетическое состояние элементарных магнитных областей (элементарных магнитиков) не является постоянным во времени и что после изменения магнитной силы некоторые области будут постепенно попадать в энергетические условия, которые позволяют им при данной величине внешней магнитной силы изменять свою магнитную ориентировку. Несмотря на то, что эта гипотеза находится в полном согласии с некоторыми высказываниями Юинга ([4]) и Бозорса ([5]), а также с результатами моих предыдущих работ, все же представляет известный интерес проверка ее еще путем обследования влияния механических сотрясений на эффект магнитной вязкости. Ясно, конечно, что механические сотрясения позволяют в наиболее простой форме воздействовать на те элементарные области, которые по этой гипотезе принимают участие в явлении магнитной вязкости. С другой стороны, изменяя магнитную индукцию с помощью механических сотрясений, можно также весьма просто проверить и возможность объяснения магнитной вязкости как результат наличия токов Фуко в массе материала.

2. Исследованию был подвергнут один из описанных в моих предыдущих работах торов ([1, 2, 3, 6, 7]) из железной изолированной шеллаком проволоки диаметром в 0.1 мм. Измерительная и намагничивающая обмотки были навиты на обследуемый тор. Наблюдение магнитной вязкости с помощью гальванометра, типа флюксметра, производилось при $H=0$, после выключения намагничивающего тока, обусловливавшего в течение 2 секунд некоторую магнитную силу H_m. При этом отсчитывалось наибольшее отклонение гальванометра. В настоящей работе H_m было взято равным 2, 5, 10 и 30 эрстедам. Выключение намагничивающего тока выполнялось без искры в цепи намагничивающей обмотки с целью создания наиболее благоприятных условий для наблюдения магнитной вязкости ([6]). Измерительная обмотка во всех случаях присоединялась к гальванометру через 20 секунд после выключения намагничивающего тока. Механические сотрясения тора создавались с помощью частых ударов деревянным молотком по доске, поддерживавшей испытуемый тор. Совершенно естественно, что в случае замкнутой цепи гальванометра механическое сотрясение тора, само по себе, вызывало резкие передвижения рамки гальванометра в ту же сторону, в которую происходило ее сравнительно плавное движение благодаря спаданию остаточной магнитной индукции, обусловленному магнитной вязкостью.

3. Обследование влияния механических сотрясений на проявления магнитной вязкости было выполнено следующим образом. Механические сотрясения были введены только на промежуток времени между выключением намагничивающего тока и включением гальванометра в цепь измерительной обмотки, причем механические сотрясения начинались через пять секунд после выключения намагничивающего тока и кончались за пять секунд до присоединения гальванометра к измерительной обмотке. Следовательно, исследуемый тор подвергался воздействию механических сотрясений при $H=0$ в течение 10 секунд перед наблюдением проявлений магнитной вязкости.

Как и следовало ожидать, мною было обнаружено, что интенсивные механические сотрясения, произведенные после выключения намагничивающего тока и перед наблюдением магнитной вязкости, весьма сильно уменьшают последующие ее проявления. Это иллюстрируется прилагаемой таблицей.

Эрстеды, H_m	2	5	10	30
Проявления магнитной вязкости при $H=0$, наблюденные без механических сотрясений, гауссы	0.15	0.56	0.80	1.15
Проявления магнитной вязкости при $H=0$, наблюденные после предварительного воздействия механическими сотрясениями, гауссы	0.03	0.16	0.23	0.32

4. Представляется несомненным, что если бы магнитная вязкость действительно являлась лишь результатом сколь угодно сложного задерживающего влияния токов Фуко, то при введении механических сотрясений, т. е. после добавочного изменения магнитной индукции, обусловленного сотрясениями, и после связанного с ними усиления токов Фуко в массе материала, последующий эффект магнитной вязкости мог бы только увеличиваться, а не уменьшаться, как это имеет место на самом деле. Однако, если рассматривать магнитную вязкость в качестве некоторого самостоятельного свойства ферромагнитных материалов, совершенно несвязанного в основном с токами Фуко, и как результат постепенного достижения некоторыми элементарными магнитными областями энергетических состояний, допускающих изменение ориентировки их магнитных осей в данных условиях,— то с этой точки зрения результаты настоящего исследования являются вполне естественными. Действительно, механические сотрясения, облегчая изменение ориентировки намагничения элементарных областей, должны способствовать более быстрой перестройке тех элементарных областей, которые могли бы обусловить последующие проявления магнитной вязкости. При этом нельзя, конечно, отрицать влияния токов Фуко на протекание тех изменений магнитной индукции, которые обусловлены магнитной вязкостью. Однако, по моему мнению, это задерживающее влияние не играет принципиальной роли в вопросе о природе магнитной вязкости, оказывая лишь некоторое влияние на общий ход этого явления (7). Следует отметить, что влияние

механических сотрясений на последующие проявления магнитной вязкости значительно резче выражено в случае образцов с меньшей коэрцитивной силой.

5. Настоящая работа позволяет придти к заключению, что:

а) Механические сотрясения, введенные на определенный промежуток времени после изменения магнитной силы, уменьшают последующие проявления магнитной вязкости.

б) Явление магнитной вязкости обусловлено не сколь угодно сложным задерживающим влиянием токов Фуко, а неустановившимся магнитным состоянием вещества после изменения магнитной силы, причем это состояние переходит в более установившееся благодаря воздействию механических сотрясений на данное вещество.

Научно-исследовательный сектор
Ленинградского индустриального института.
Лаборатория акад. В. Ф. Миткевича.

Поступило
21 II 1935.

PHYSICS

THE INFLUENCE OF MECHANICAL VIBRATION ON THE SUBSEQUENT MANIFESTATIONS OF MAGNETIC VISCOSITY

By A. V. MITKEVIČ (MITKEVITCH)

(Communicated by V. Th. Mitkevitch, Member of the Academy, 10. III. 1935)

1. Up to now there have been advanced many different suggestions as to the cause of the phenomenon of magnetic viscosity. Sometimes magnetic viscosity is even considered a result of eddy currents. But I have shown before ([1, 2, 3]) that in some cases magnetic viscosity can cause such a change of magnetic induction as cannot be explained by eddy currents delay however complicated.

It seems probable that magnetic viscosity may be considered the result of a certain inconstancy of the energy state of elementary domains (elementary magnets). Whereas this hypothesis is in good agreement with some of the Ewing's ([4]) and Bozorth's ([5]) suppositions, as well as with my previous papers ([1, 2, 3, 6, 7]), it may nevertheless well be of interest to investigate the influence of mechanical vibration on the phenomenon of magnetic viscosity, in order to test the above-mentioned hypothesis. It is clear that mechanical vibration may affect in the most simple way those elementary domains which, according to this hypothesis, cause the phenomenon of magnetic visocosity. On the other hand, changing magnetic induction by mechanical vibration, we can once more examine the possibility to explain magnetic viscosity as the result of eddy currents.

2. In the present work I investigated one of the previously described iron rings ([1, 2, 3, 6, 7]) made of shellac coated iron wire 0.1 mm in diameter. Search coil and magnetizing coil were wound on this iron ring. Magnetic viscosity was observed at $H=0$, by means of a galvanometer (fluxmeter type), after the breaking of the magnetizing current that had excited magnetic force H_m during 2 seconds. In the following table are given maximum deflections of this galvanometer obtained at $H=0$ for the cases of H_m equal to 2, 5, 10, and 30 oersteds. To ensure favourable conditions for the observation of magnetic vicosity ([6]), the breaking of the magnetizing

current was carried out without a spark in the circuit of the magnetizing coil. In all cases search coil was connected to the galvanometer after 20 seconds from the instant of breaking the circuit of magnetizing coil. Mechanical vibration was produced at $H=0$ by hammering the wooden plank on which the investigated iron ring was placed. When the galvanometer circuit was closed, each of the strokes caused a throw of the galvanometer in the same direction as that of deflections caused at $H=0$ by magnetic viscosity.

3. The investigation of the influence of mechanical vibration on magnetic viscoity was carried out in the following way. Mechanical vibration was superposed only during the interval of time between the instant of breaking the magnetizing current and that of connecting the search coil to the galvanometer. That is to say, the hammering began after five seconds from the instant of breaking the magnetizing current and ended five seconds before connecting the search coil to the galvanometer. Hence, the examined iron ring had been undergoing mechanical vibration at $H=0$ during 10 seconds before the observation of magnetic viscosity.

As could be expected, I have found that vigorous mechanical vibration taking place after the breaking of the magnetizing current and before the observation of magnetic viscosity, decreases to a great extent the subsequent manifestations of magnetic viscosity. The table that follows contains some examples of this decrease of the manifestations of magnetic viscosity caused by preliminary mechanical vibration.

Oersteds, H_m	2	5	10	30
Manifestations of magnetic viscosity observed at $H=0$ without any mechanical vibration, gausses	0.15	0.56	0.80	1.15
Manifestations of magnetic viscosity observed at $H=0$ after preliminary mechanical vibration, gausses . . .	0.03	0.16	0.23	0.32

4. It seems quite certain that, if magnetic viscosity was indeed just a result of however complicated eddy currents, then, because of mechanical vibration, i. e. after the additional change of magnetic induction caused by vibration and the increase of eddy currents resulting from this change, the subsequent manifestations of magnetic viscosity could only increase and on no account decrease, as is actually the case. However, if magnetic viscosity be considered the result of a certain instability of the energy state of elementary domains, i. e. the result of a gradual coming of some elementary domains into energy state enabling them, under these conditions, to change the direction of magnetization, then the obtained experimental data seem quite natural. In fact, preliminary mechanical vibration must facilitate the change of the direction of magnetization of those elementary domains that could further take part in subsequent manifestations of magnetic viscosity. Together with this, it is necessary, of course, to take into account the possible influence of eddy currents on the changes of magnetic induction arising because of magnetic viscosity. In my opinion, the retarding influence of eddy currents is not the ultimate cause of the phenomenon of magnetic viscosity, but just affects somehow the general course of the changes of magnetic induction caused by magnetic viscosity (7). It is to be noted that the influence of mechanical vibration on the subse-

quent manifestations of magnetic viscosity is substantially more marked in the specimen that has comparatively smaller coercive force.

5. The results of this investigation have shown that:

a) Mechanical vibration, when superposed for a certain interval of time after the change of magnetic force, decreases subsequent manifestations of magnetic viscosity.

b) The penomenon of magnetic viscosity is not caused by however complicated eddy currents delay but by the unstable magnetic state of matter after the change of magnetic force, this magnetic state becoming more stable because of mechanical vibration.

Research Department of the Leningrad Industrial Institute.
Laboratory of V. Th. Mitkevitch,
Member of the Academy.

Received
21. II. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

[1] А. В. Миткевич, Электричество, 1933, № 10, стр. 29. A. Mitkevič (Mitkevitch), Electrichestvo, 1933, No 10 p. 29. [2] А. В. Миткевич, Сборник Ленингр. электромеханического института (ЛЭМИ), 1934, № 2 (IV), стр. 14. A. Mitkevič (Mitkevitch), Trans. of the Leningrad Electromechanical Institute (LEMI), 1934, No 2 (IV), p. 14. [3] А. В. Миткевич, ДАН, 1934, том III, № 6, стр. 426. A. Mitkevič (Mitkevitch), C. R. Acad. Sci. URSS, 1934, vol. III, No 6, p. 429. [4] Ewing, Magnetic Induction in Iron and Other Metals. [5] Bozorth, Physical Review, 1928. p. 124. [6] А. В. Миткевич, ДАН, 1934, том I, № 9, стр. 531. A. Mitkevič (Mitkevitch), C. R. Acad. Sci. URSS, 1934, vol. I, No 9, p. 534. [7] А. В. Миткевич, ДАН, 1934, том III, № 2 стр. 96. A. Mitkevič (Mitkevitch), C. R. Acad. Sci. URSS, 1934, vol. III, No 2, p. 99.

ХИМИЯ

В. В. ИПАТЬЕВ и В. Г. ТРОНЕВ

О РАЗДЕЛЕНИИ ПЛАТИНОВЫХ МЕТАЛЛОВ ВОДОРОДОМ ПОД ДАВЛЕНИЕМ

(*Представлено академиком Н. С. Курнаковым 10 I 1935*)

После выяснения механизма вытеснения отдельных металлов платиновой группы из растворов солей водородом, о чем было сообщено в нашей первой статье ([1]), представлялось интересным изучить действие водорода на бинарные смеси солей этих металлов.

В литературе имеются указания о наличии определенной очередности взаимодействия водорода при атмосферном давлении с отдельными компонентами смеси солей металлов платиновой группы. Так Бунзен при пропускании H_2 в смесь растворов всех платиновых металлов констатировал в первых порциях осажденной черни главным образом Pt и Pd, в средних фракциях преобладал Rh и наконец в последних — Ir. В то же время ни Бунзен, ни Бруннер и ни один из авторов, занимавшихся вытеснением платиновых металлов водородом, совершенно не наблюдали раздельного вытеснения Pt и Pd. Между тем первые наши опыты по изучению действия H_2 на растворы $PdCl_2$ и H_2PtCl_6 указывали на возможность раздельного осаждения Pd и Pt-черни и из их смесей. Оказалось, что скорость реакции не является фактором, определяющим очередность взаимодействия H_2 с компонентами смеси. Как выяснилось из ряда наших опытов по вытеснению металлов водородом из бинарных смесей, опреде-

ляющим очередность фактором является сродство отдельных компонентов смеси к H_2 или точнее их окислительно-восстановительные потенциалы.

I. При действии H_2 под обыкновенным давлением на смесь $PdCl_2 + CuCl_2$ в первую очередь идет восстановление $PdCl_2$ до черни, причем $CuCl_2$ не оказывает никакого влияния на осаждение Pd, который полностью вытесняется за 15 мин. из 0.01*N* раствора как при наличии, так и в отсутствии $CuCl_2$.

II. При действии H_2 на смесь $PdCl_2 + FeCl_3$ в течение 6 часов не замечается образования Pd-черни, а идет медленное восстановление $FeCl_3$ в $FeCl_2$. Лишь по достижении определенного соотношения концентраций $FeCl_3$ и $FeCl_2$ в смеси с $PdCl_2$ (около 1% $FeCl_3$ и 99% $FeCl_2$) начинается быстрое осаждение Pd-черни водородом, которое заканчивается в 15 мин.

В первом и втором примере скорость восстановления водородом растворенных $CuCl_2$ и $FeCl_3$ очень мала. Но в первом случае идет сперва более быстрая реакция H_2 с $PdCl_2$, а $CuCl_2$ остается без изменения, во втором же случае сперва протекает очень медленная реакция $FeCl_3$ с H_2. Эти противоречивые на первый взгляд факты легко объяснить, если принять во внимание величины окислительно-восстановительных потенциалов соответствующих переходов $Fe^{\cdot\cdot\cdot} \rightarrow Fe^{\cdot\cdot}$, $Cu^{\cdot\cdot} \rightarrow Cu^{\cdot}$, $Pd^{\cdot\cdot} \rightarrow Pd$. Потенциал $\frac{Cu^{\cdot}}{Cu}$, равный +0.34 V, ниже потенциала $\frac{Pd^{\cdot\cdot}}{Pd}$, и поэтому в первую очередь H_2 взаимодействует с $PdCl_2$ как более сильным окислителем, в то время как $CuCl_2$ остается в растворе без изменения. Наоборот, потенциал $\frac{Fe^{\cdot\cdot\cdot}}{Fe^{\cdot\cdot}}$ при наличии в начальной смеси с $PdCl_2$ 100% $FeCl_3$, значительно выше потенциала Pd, и поэтому в первую очередь идет взаимодействие H_2 с более сильным окислителем $FeCl_3$, в то время как $PdCl_2$ остается без изменения в растворе в течение нескольких часов.

Аналогичная картина имеет место и при действии H_2 на бинарные смеси других солей, в том числе и на смеси платиновых металлов. Предположение об определяющей роли потенциалов при действии H_2 на бинарные смеси солей оправдывается и для случаев бинарных смесей платиновых металлов. Об этом говорят результаты наших опытов по изучению действия водорода на смеси солей: Pt + Pd, Pd + Ir, Rh + Ir.

I. На основании имеющихся в нашем распоряжении данных о потенциалах Pd и Pt, было предположено, что при действии H_2 на смесь $PdCl_2$ и H_2PtCl_6, в первую очередь пойдет восстановление Pt^{IV} в Pt^{II}, затем вытеснение Pd и, наконец, в последнюю очередь будет происходить образование Pt-черни из Pt^{II}.

Такая последовательность действительно имеет место как при атмосферном давлении H_2, так и при повышенном, при непременном условии энергичного размешивания растворов в целях обеспечения равномерного течения реакции по всему объему. Так, например, при 25°, давлении H_2 в 10 атм. и размешивании со скоростью 500—600 об./мин. из смеси 0.01*N* $PdCl_2$ и 0.1*N* H_2PtCl_6 в HCl получены следующие результаты: в течение 1 ч. 30 м. происходит восстановление H_2PtCl_6 в H_2PtCl_4 на 34% без образования какой-либо черни; в течение 4 часов черни также нет, а продолжается восстановление Pt^{IV} в Pt^{II}. Повышая давление до 30 атм., можно ускорить первую стадию реакции и наблюдать уже образование Pd-черни через 1 час. Причем только после осажения Pd (через 1 ч. 40 м.) начинается медленное образование Pt-черни и вполне возможно уловить

момент, когда весь Pd находится в осадке, а вся Pt остается в растворе. Варируя концентрации смеси и добавок (HCl, HNO_3), можно найти условия быстрого отделения Pd от Pt с достаточной степенью чистоты. Особенно интересным в практическом отношении является тот факт, что это разделение возможно в присутствии довольно значительных концентраций HCl и HNO_3.

II. Исходя из косвенных указаний о потенциалах $\frac{Pd^{\cdot\cdot}}{Pd}$*, $\frac{Ir^{IV}}{Ir^{III}}$ и $\frac{Ir^{III}}{Ir}$, имеющихся в работах Вуда и Иоста, Терри и Бекера и др., предполагалось, что при действии H_2 на смесь растворов $PdCl_2$ и Na_2IrCl_6 в первую очередь должен реагировать с H_2 более сильный окислитель — Na_2IrCl_6, так как окислительно-восстановительный потенциал $\frac{Ir^{IV}}{Ir^{III}}$ имеет величину +1.02 V, значительно превышающую потенциал Pd (от +0.7 до 0.8 V). Такая очередность подтверждается нашими опытами как при атмосферном давлении H_2, так и при давлении до 100 атм. при условии равномерного течения реакции по объему жидкости. Уже при комнатной t° и атмосферном давлении H_2, при размешивании со скоростью около 1000 об./мин., легко вытесняется вес Pd из смеси 0.01*N* $PdCl_2$ с 0.1*N* Na_2IrCl_6 в течение 1 часа, из смеси 0.01*N* $PdCl_2$ 0.1*N* Na_3IrCl_6 полное осаждение Pd достигается за 15 мин. В обоих случаях в растворе остается весь Ir^{III} без примеси Pd^{II} и, наоборот, в осадке не обнаруживается следов Ir-черни. Из фильтрата с Ir^{III} можно вытеснить Ir только при повышенной t° (до 100°) и повышенном давлении. Тот факт, что Ir^{III} не препятствует осаждению Pd водородом из смеси солей этих металлов, говорит, повидимому, за то, что неизвестная до сих пор величина потенциала $\frac{Ir^{III}}{Ir}$ — значительно ниже потенциала $\frac{Pd^{II}}{Pd}$.

III. При действии H_2 на смесь Na_3RhCl_6 и Na_2IrCl_6 должна иметь место такая же последовательность, как и в случае смеси Pd с Ir, потому что величины потенциалов $\frac{Pd^{\cdot\cdot}}{Pd}$ и $\frac{Rh^{\cdot\cdot\cdot}}{Rh}$ одного порядка от 0.6 до 0.8 V. Действительно, можно осадить весь Rh из смеси 0.1*N* Na_3RhCl_6 и 0.1*N* Na_3IrCl_6 в течение 1 часа при t° 25° и давлении H_2 1 атм. и энергичном размешивании раствора. Весь Ir остается в растворе. Из смеси Na_3RdCl_6 с Na_2IrCl_6 происходит также полное осаждение Rh-черни, но уже в течение 3 час. при тех же прочих условиях, как и в опытах со смесями Rh^{III} — Ir^{III}. Замедление в осаждении Rh из смеси Rh^{III} + Ir^{IV} объясняется тем, что в первую очередь идет восстановление Ir^{IV} — Ir^{III}, после чего полностью осаждается Rh, потенциал которого ниже потенциала $\frac{Ir^{IV}}{Ir^{III}}$ и выше $\frac{Ir^{III}}{Ir}$.

IV. Более сложная картина получается при восстановлении смеси $PdCl_2$ и Na_3RhCl_6, так как здесь возможно совместное осаждение Rh и Pd в силу близости величин их потенциалов. При t° 25°, атмосферном давлении H_2 и размешивании 1000 об./мин. из этой смеси уже через 15 мин. осаждается чернь, содержащая преимущественно Pd, но с примесью Rh. Через 1 час раствор обесцвечивается, и в осадке получается смесь Rh и

* В следующей статье будет сообщено о результатах косвенного определения потенциалов платиновых металлов, в частности потенциала Pd из данных констант равновесия.

Pd-черни. Необходимым условием разделения Rh и Pd водородом является увеличение разницы между величинами их потенциалов в растворах, что можно сделать путем изменения концентраций ионов $Pd^{\cdot\cdot}$ и $Rh^{\cdot\cdot\cdot}$ образованием соответствующих комплексов.

Из приведенных примеров явствует, что методом вытеснения платиновых металлов водородом возможно разделить смеси Pd + Pt, Pd + Ir, Pd + Rh. Работа в этом направлении продолжается, и имеются основания полагать, что этот метод при детальном изучении окажется удобным не только в аналитической практике, но и при аффинаже благородных металлов.

Институт общей и неорганической химии.
Академия Наук СССР. Москва.

Поступило
10 I 1935.

CHEMIE

ÜBER DIE TRENNUNG DER PLATINMETALLE DURCH WASSERSTOFF UNTER DRUCK

Von W. W. IPATJEV und W. G. TRONEV

(*Vorgelegt von N. S. Kurnakov, Mitglied der Akademie, d. 10. I. 1935*)

Nachdem wir in unserer ersten Abhandlung (1) den Mechanismus der Verdrängung der einzelnen zur Platingruppe gehörigen Metalle durch Wasserstoff aus den Lösungen ihrer Salze klargelegt haben, war es von Interesse, die Einwirkung von Wasserstoff auf binäre Gemische von Salzen dieser Metalle zu erforschen.

Die in der einschlägigen Literatur vorhandenen Angaben deuten darauf hin, dass die Wechselwirkung zwischen dem Wasserstoff bei Normaldruck und den einzelnen Komponenten eines Gemisches von Salzen der zur Platingruppe gehörigen Metalle in einer gewissen Aufeinanderfolge geschieht. So hat Bunsen, als er Wasserstoff in eine Mischung von Lösungen sämtlicher Platinmetalle leitete, festgestellt, dass die ersten Anteile der ausgeschiedenen Schwärze hauptsächlich Pt und Pd enthielten, während in den mittleren Anteilen Rh und in den letzten Ir vorherrschten. Gleichzeitig konnten aber weder Bunsen noch Brunner, wie überhaupt keiner der Forscher, die sich mit der Verdrängung von Platinmetallen durch Wasserstoff befassten, irgend eine gesonderte Ausscheidung von Pt und Pd wahrnehmen. Es erwies sich jedoch, dass die Reaktiongeschwindigkeit keinen Faktor bildet, der die Aufeinanderfolge der Wechselwirkung zwischen H_2 und den Komponenten des Gemisches bedingt. Wie sich aus einer Reihe von Versuchen mit Verdrängung von Metallen durch Wasserstoff aus binären Gemischen, die wir vornahmen, ergab, bildet die Affinität der einzelnen Komponenten des Gemisches zu H_2 — oder, genauer, ihre Oxydations-Reduktionspotentiale — denjenigen Faktor, der die Aufeinanderfolge dieser Reaktionen bestimmt.

I. Bei Einwirkung von H_2 auf ein Gemisch von $PdCl_2$ und $CuCl_2$, unter gewöhnlichem Druck, findet zunächst eine Reduktion von $PdCl_2$ zu Schwärze statt, wobei $CuCl_2$ gar keinen Einfluss auf die Ausscheidung von Pd ausübt: letzteres wird in 15 Min. aus einer 0.01 *N* Lösung quantitativ verdrängt, und zwar unabhängig davon, ob $CuCl_2$ in der Lösung vorhanden ist oder nicht.

II. Bei Einwirkung von H_2 auf ein Gemisch von $PdCl_2$ und $FeCl_3$ wird während 6 Stunden keine Bildung von Pd-Schwärze wahrgenommen, sondern es geht eine langsame Reduktion von $FeCl_3$ zu $FeCl_2$ vor sich. Erst nachdem die Konzentrationen von $FeCl_3$ und $FeCl_2$ im Gemisch mit $PdCl_2$ ein bestimmtes Verhältnis zueinander erreicht haben (etwa 1% $FeCl_3$ und 99% $FeCl_2$), setzt eine schnelle Ausscheidung der Pd-Schwärze durch Wasserstoff ein, die schon in 15 Min. ihren Abschluss findet.

In beiden Beispielen ist die Geschwindigkeit, mit der die gelösten $CuCl_2$ und $FeCl_3$ durch Wasserstoff reduziert werden, äusserst gering, nur geht im ersten Fall zuerst die schneller verlaufende Reaktion zwischen H_2 und $PdCl_2$ vor sich, und $CuCl_2$ bleibt unverändert, während im zweiten Fall zuerst die sehr langsam verlaufende Reaktion zwischen $FeCl_3$ und H_2 einsetzt. Diese scheinbar einander widersprechenden Tatsachen lassen sich leicht erklären, wenn man die Werte der Oxydations-Reduktionspotentiale bei den entsprechenden Übergängen $Fe^{\cdot\cdot\cdot} \rightarrow Fe^{\cdot\cdot}$, $\rightarrow Cu^{\cdot\cdot} \rightarrow Cu$, $Pd^{\cdot\cdot} \rightarrow Pd$ in Betracht zieht.

Das Potential $\frac{Cu^{\cdot\cdot}}{Cu}$, welches $+0.34$ V beträgt, hat einen geringeren Wert als das Potential $\frac{Pd^{\cdot\cdot}}{Pd}$; daher tritt H_2 zunächst mit $PdCl_2$ als stärkerem Oxydationsmittel in Reaktion, während $CuCl_2$ unverändert in der Lösung bleibt. Umgekehrt ist das Potential $\frac{Fe^{\cdot\cdot\cdot}}{Fe^{\cdot\cdot}}$ bei Vorhandensein von 10% $FeCl_3$ im ursprünglichen Gemisch mit $PdCl_2$ bedeutend höher als das Potential Pd, weshalb H_2 zunächst mit dem stärkeren Oxydationsmittel $FeCl_3$ in Reaktion tritt, während $PdCl_2$ einige Stunden lang unverändert in der Lösung bleibt.

Das gleiche Bild haben wir auch bei Einwirkung von H_2 auf binäre Gemische anderer Salze, darunter auch auf Gemische von Platinmetallen. Die Voraussetzung einer bestimmenden Rolle der Potentiale bei Einwirkung von H_2 auf binäre Gemische von Salzen bestätigt sich auch bei binären Gemischen von Platinmetallen. Hierfür sprechen die Ergebnisse unserer Versuche, die wir zur Erforschung der Einwirkung von Wasserstoff auf Salzgemische von Pt + Pd, Pd + Ir, Rh + Ir unternommen haben.

I. Auf Grund der uns zur Verfügung stehenden Angaben über die Potentiale von Pd und Pt wurde vorausgesetzt, dass bei Einwirkung von H_2 auf ein Gemisch von $PdCl_2$ und H_2PtCl_6 zunächst Pt^{IV} zu Pt^{II} reduziert, sodann Pd verdrängt wird, und erst zuletzt die Ausscheidung der Pt-Schwärze aus Pt^{II} erfolgt.

Eine solche Aufeinanderfolge wird in der Tat sowohl bei normalem als auch bei erhöhtem H_2-Druck beobachtet, allerdings unter der streng einzuhaltenden Bedingung, dass die Lösungen tüchtig gerührt werden, um einen gleichmässigen Verlauf der Reaktion in der ganzen Masse zu sichern. So liessen sich z. B. bei 25°, einem H_2-Drucke von 10 atm. und einer Rührgeschwindigkeit von 500—600 Umdrehungen in der Minute aus dem Gemisch einer 0.01 *N* $PdCl_2$- und einer 0.1 *N* H_2PtCl_6-Lösung in HCl folgende Resultate erzielen: während 1 Stunde 30 Min. verläuft die Reduktion von H_2PtCl_6 zu H_2PtCl_4 (die eine Höhe von 34% erreicht) ohne jegliche Pd-Schwärzebildung; innerhalb 4 Stunden zeigt sich immer noch keine Schwärze, sondern die Reduktion von Pt^{IV} zu Pt^{II} verläuft weiter. Durch Erhöhung des Druckes auf 30 atm. lässt sich die erste Reaktionsphase beschleunigen und eine Pd-Schwärzebildung schon nach einer Stunde erzielen. Hierbei setzt erst nach Ausscheidung von Pd (nach 1 Stunde 40 Min.) eine allmähliche

Pt-Schwärzebildung ein, und man kann ganz genau den Moment feststellen, wo das Pd quantitativ schon ausgefallen, während das ganze Pt noch in der Lösung verbleibt. Durch Variierung der Konzentration des Gemisches und der Zusätze (HCl, HNO_3) lassen sich die Bedingungen für eine schnelle Trennung des Palladiums vom Platin (mit genügend hohem Reinheitsgrade) ermitteln.

Praktisch bietet die Tatsache besonderes Interesse, dass diese Trennung auch bei ziemlich hohen Konzentrationen von HCl und HNO_3 möglich ist.

II. Auf Grund von indirekten Angaben über die Potentiale $\frac{Pd^{\cdot\cdot}}{Pd}$, $\frac{Ir^{IV}}{Ir^{III}}$ und $\frac{Ir^{III}}{Ir}$, die in den Arbeiten von Wood und Jost, Terrey und Baker u. a. enthalten sind, wurde vorausgesetzt, das bei Einwirkung von H_2 auf ein Gemisch von $PdCl_2$- und Na_2IrCl_6-Lösungen zunächst das stärkere Oxydationsmittel — Na_2IrCl_6 — mit H_2 in Reaktion treten muss, da das Oxydations-Reduktionspotential $\frac{Ir^{IV}}{Ir^{III}}$ einen Wert von + 1.02 V besitzt, welcher den des Potentials von Pd (0.7—0.8 V) erheblich überragt. Diese Reihenfolge wurde durch unsere Versuche sowohl bei atmospärischem Druck als auch bei einem Druck bis 100 atm. bestätigt, wobei allerdings ein gleichmässiger Verlauf der Reaktion in der Flüssigkeit die notwendige Bedingung war. Schon bei Zimmertemperatur und atmosphärischem Druck lässt sich bei einer Rührgeschwindigkeit von ca. 1000 Umdrehungen in der Minute das Palladium quantitativ aus einem Gemisch von 0.01 *N* $PdCl_2$ und 0.1 *N* Na_2IrCl_6 leicht im Verlauf einer Stunde verdrängen, während aus einem Gemisch von 0.01 *N* $PdCl_2$ und 0.1 *N* Na_3IrCl_6 die völlige Pd-Ausscheidung schon in 15 Min. erfolgt. In beiden Fällen bleibt das ganze Ir^{III} ohne jegliche Beimengungen in der Lösung, und umgekehrt sind im Niederschlage keine Spuren von Ir-Schwärze wahrzunehmen. Aus dem das Ir^{III} enthaltenden Filtrat lässt sich das Iridium nur bei erhöhter Temperatur (bis 100°) und erhöhtem Druck verdrängen. Die Tatsache, dass Ir^{III} der Pd-Ausscheidung durch Wasserstoff aus einem Gemisch von Salzen dieser Metalle nicht hinderlich ist, spricht anscheinend dafür, dass der bisher unbekannte Wert des Potentials $\frac{Ir^{III}}{Ir}$ bedeutend niedriger ist als der des Potentials $\frac{Pd^{II}}{Pd}$.

III. Bei Einwirkung von H_2 auf ein Gemisch von Na_3RhCl_6 und Na_2IrCl_6 muss dieselbe Reihenfolge vorliegen wie bei den Gemischen von Pd und Ir, weil die Potentiale $\frac{Pd^{\cdot\cdot}}{Pd}$ und $\frac{Rh^{\cdot\cdot\cdot}}{Rh}$ einen Wert der gleichen Ordnung von 0.6—0.8 V bisitzen. Und es lässt sich in der Tat aus einem Gemisch von 0.1 *N* Na_3RhCl_6 und 0.1 *N* Na_2IrCl_6 das Rh quantitativ im Verlaufe I Stunde bei 25°, atmosphärischem H_2-Druck und energischem Rühren der Lösung fällen. Das ganze Ir bleibt in der Lösung zurück. Aus einem Gemisch von Na_3RhCl_6 und Na_2IrCl_6 lässt sich die Rh-Schwärze gleichfalls quantitativ ausscheiden, aber erst in 3 Stunden unter sonst gleichen Bedingungen wie bei den Gemischen von Rh^{III} und Ir^{III}. Die Verzögerung, die die Aus-

* In der nächsten Abhandlung wird über die Ergebnisse der indirekten Bestimmung der Potentiale von Platinmetallen, insbesondere des Potentials von Pd aus den Gleichgewichtskonstanten, berichtet werden.

scheidung aus einem Gemisch $Rh^{III} — Ir^{IV}$ erfährt, lässt sich darauf zurückführen, dass in erster Linie Ir^{IV} zu Ir^{III} reduziert wird, worauf Rh, dessen Potential zwar einen geringeren Wert als das Potential $\frac{Ir^{IV}}{Ir^{III}}$, jedoch einen höheren als $\frac{Ir^{III}}{Ir}$ besitzt, quantitativ ausfällt.

IV. Komplizierter gestaltet sich die Reduktion eines Gemisches von $PdCl_2$ und Na_3RhCl_6, da hier infolge der nahen Werte ihrer Potentiale eine gleichzeitige Ausscheidung von Rh und Pd möglich ist. Bei 25°, atmosphärischem Druck von H_2 und einer Rührgeschwindigkeit von 1000 Umdrehungen in der Minute fällt aus diesem Gemisch schon nach 15 Min. eine Schwärze aus, welche vorwiegend Pd, jedoch mit Beimengungen von Rh, enthält. Nach 1 Stunde entfärbt sich die Lösung, und im Niederschlage befindet sich ein Gemisch von Rh- und Pd-Schwärze. Um eine Trennung von Rh und Pd durch Wasserstoff vorzunehmen, muss die Differenz zwischen den Werten ihrer Potentiale in den Lösungen erhöht werden, was man durch Veränderung der Konzentration von $Pd^{\cdot\cdot}$ und $Rh^{\cdot\cdot\cdot}$, sowie auch durch Bildung entsprechender Komplexe herbeiführen kann.

Aus den angeführten Beispielen geht hervor, dass man mittels Verdrängung der Platinmetalle durch Wasserstoff eine Trennung von Pd und Pt, Pd und Ir, Pd und Rh in Gemischen erzielen kann. Die Untersuchung wird in dieser Richtung fortgesetzt, und es sind Gründe für die Annahme vorhanden, dass diese Methode sich bei näherem Studium nicht nur in der analytischen Praxis, sondern auch bei der Läuterung von Edelmetallen bewähren wird.

Institut für allgemeine und anorganische Chemie.
Akademie der Wissenschaften der UdSSR.
Moskau.

Eingegangen
d. 10. I. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] ДАН, 1935, I, № 9. C. R. Acad. Sci. URSS, 1935, I, № 9.

ХИМИЯ

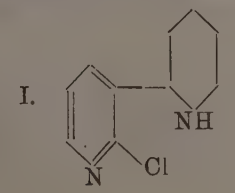
М. И. КАБАЧНИК и М. М. КАЦНЕЛЬСОН

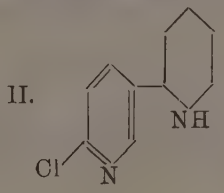
АМИДИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ НАТРИЙ- И КАЛИЙ-АМИДА В РЯДУ АЛКАЛОИДОВ

III. О СТРОЕНИИ ИЗОМЕРНЫХ ХЛОР-АНАБАЗИНОВ

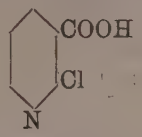
(*Представлено академиком А. Е. Фаворским 1 II 1935*)

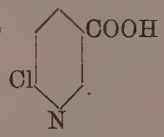
В наших работах по амидированию натрий-амидом алкалоида анабазина [1] были описаны два изомерных хлор-анабазина I и II:



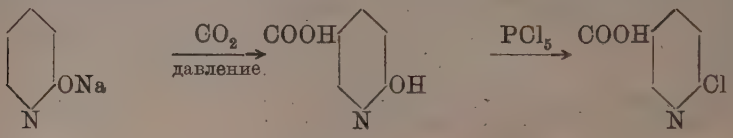


α-хлор-анабазин I был получен диазотированием α-амино-анабазина с темп. пл. 89.5—90° в водном растворе, насыщенном HCl, натрий-нитритом. Он обладал темп. пл. 58.5—59.5 и кипел при 126° при 1 мм. α′-хлор-анабазин II получался диазотированием α′-амино-анабазина с темп. пл. 109° в тех же условиях и обладал темп. пл. 99.5—100°. Строение обоих изомеров было установлено окислением их марганцево-кислым кали; при этом α-хлор-анабазин I дал при окислении α-хлор-никотиновую кислоту III с темп. пл. 192—193°, а α′-хлор-анабазин — изомерную

III. 

IV. 

α′-хлор-никотиновую кислоту IV с темп. пл. 197—198°.* Ввиду близости точек плавления изомерных хлор-никотиновых кислот, а также трудности точного определения температур плавления (обе кислоты при недостаточно быстром нагревании в капилляре разлагаются около 185°, не плавясь), мы синтезировали для сравнения с нашими кислотами α′-хлор-никотиновую кислоту. Путь синтеза последней не оставлял никаких сомнений в ее строении, как пара-хлор-кислоты; именно, нами был осуществлен синтез по следующей схеме:



Na-соль α-пиридона

α′-окси-никотиновая кислота темп. пл. 303—304°

α′-хлор-никотиновая кислота темп. пл. 198°

Первая реакция описана А. Е. Чичибабиным и А. В. Кирсановым (6) и несомненно приводит к α′-окси-никотиновой кислоте; вторая реакция проведена по Пехману (2) и бесспорно дает α′-хлор-никотиновую кислоту.

Сравнение этой синтетической α′-хлор-никотиновой кислоты с нашими хлор-никотиновыми кислотами установило правильность нашего определения строения изомерных хлор-анабазинов. Именно α′-хлор-никотиновая кислота IV, полученная из хлор-анабазина с темп. пл. 99.5—100°, не дала депрессии температуры плавления в смешанной пробе с синтетической α′-хлор-никотиновой кислотой, в то время как α-хлор-никотиновая кислота III, полученная окислением хлор-анабазина с темп. пл. 58.5—59.°5, дала сильную депрессию температуры плавления в смешанной пробе с этой же кислотой. Таким образом вопрос о строении изомерных хлор-анабазинов нами считался решенным.

В августовском номере Berichte der Deutschen chemischen Gesellschaft, 1934, появилась работа Г. Меньшикова, А. Григоровича и А. Орехова (4) по окислению анабазина, где описывается следующий ряд превращений:

Анабазин → бензоил-анабазин → иодометилат бензоил-анабазина → N-метил-бензоил-анабазон → N-метил-анабазон → хлор-анабазин.

* Литературные указания относительно температур плавления хлор-никотиновых кислот следующие: для α′-хлор-никотиновой кислоты Пехман дает темп. пл. 199° (2), для α-хлор-никотиновой кислоты А. Е. Чичибабин и А. В. Кирсанов — 193° (3), О. Зейде—193° (5).

Полученному хлор-анабазину авторы приписывают строение альфа-хлор-анабазина на основании окисления его в альфа-хлор-никотиновую кислоту. Однако в экспериментальной части это окисление не описывается. Хлор-анабазин, ими полученный, кипит при 159—164° при 10 мм и имеет точку плавления 98—99°. Сравнивая константы и свойства этого хлор-анабазина с нашими хлор-анабазинами, легко установить тождественность его с нашим α′-хлор-анабазином, обладающим темп. пл. 99.5—100°, но ни в коем случае не с α-хлор-анабазином, имеющим темп. пл. 58.5—59.5°. Таким образом эти авторы имели в руках α′-хлор-анабазин, ошибочно приняв его за α-хлор-анабазин. В соответствии с этим следует считать, что весь ряд продуктов, из которых этот хлор-анабазин был получен, является рядом не α-, но α′-производных анабазина.

Второй ряд реакций, описанных Г. Меньшиковым, А. Григоровичем и А. Ореховым, изображается следующей схемой:

Анабазин → метил-анабазин-иодометилат → N, N′-диметил-анабазон → N-метил-хлор-анабазин.

Полученному метил-хлор-анабазину исследователи приписывают также строение N-метил-α-хлор-анабазина; это утверждение ими обосновывается экспериментально тем, что при окислении этого метил-хлор-анабазина получается хлор-никотиновая кислота с темп. пл. 193°, что соответствует альфа-хлор-кислоте. Авторы одновременно указывают, что ими проведено плавление полученной кислоты в смешанной пробе с α-хлор-никотиновой кислотой; однако они не указывают, каким путем последняя была ими получена и какой температурой плавления она обладала.

Принимая во внимание вышеуказанную ненадежность определения точек плавления изомерных хлор-никотиновых кислот тогда, когда оно не сопровождается плавлением смешанных проб с синтетическими кислотами определенного строения, следует весьма осторожно отнестись к доказательству строения метил-хлор-анабазина, приведенному Г. Меньшиковым, А. Григоровичем и А. Ореховым. К сожалению, мы имели недостаточное количество α-хлор-анабазина (с темп. пл. 58.5—59.5°), чтобы, прометилировав его, сравнить свойства полученного N-метил-α-хлор-анабазина с веществом, описанным указанными авторами. Метилирование же α′-хлор-анабазина (с темп. пл. 99.5—100°) привело нас к N-метил-α′-хлор-анабазину, по свойствам своим отличающемуся от метил-хлор-анабазина Г. Меньшикова и др. В то время как наш N-метил-α′-хлор-анабазин представляет собою кристаллическое вещество с темп. пл. 45—47° и темп. кип. 160—162° при 16 мм, метил-хлор-анабазин, полученный Г. Меньшиковым, А. Григоровичем и А. Ореховым, обладает темп. кип. 132—135° при 6 мм, но не кристаллизуется вовсе. Трудно сказать, является ли причиной различия свойств этих продуктов изомерия их строения или же то, что вышеуказанные авторы имели на руках недостаточно чистое, а потому и не способное кристаллизоваться вещество.

После того как наша работа была уже закончена, нам удалось еще раз подтвердить установленное нами строение изомерных хлор-анабазинов путем сравнения α и α′-хлор-никотиновых кислот, полученных окислением хлор-анабазинов, с α-хлор-никотиновой кислотой, полученной синтетическим путем, не оставляющим никаких сомнений в ее строении. Проф. О. А. Зейде нам была любезно предоставлена α-хлор-никотиновая кислота, синтезированная им следующим способом:*

Хинолиновая кислота → α-амино-никотиновая кислота → α-хлор-никотиновая кислота

* Неопубликованное сообщение.

Сравнение этой синтетической α-хлор-никотиновой кислоты с кислотами, полученными окислением хлор-анабазинов, еще раз подтвердило строение хлор-анабазина с темп. пл. 99.5—100° как α′-хлор-анабазина, а хлор-анабазина с темп. пл. 58.5—59.5° как α-хлор-анабазина.

Таким образом окончательные выводы совпадают с первоначально полученными нами данными: 1) хлор-анабазин с темп. пл. 99.5—100°, тождественный с хлор-анабазином Г. Меньшикова, А. Григоровича и А. Орехова с темп. пл. 98—99°, является α′-хлор-анабазином, а не α-хлор-анабазином, как они ошибочно считают; 2) хлор-анабазин с темп. пл. 58.5—59.5° является α-хлор-анабазином; 3) N-метил-хлор-анабазин с темп. пл. 46—47° является N-метил-α′-хлор-анабазином; 4) строение метил-хлор-анабазина, полученного Г. Меньшиковым, А. Григоровичем и Г. Орэховым окислением метил-анабазин-иодометилата, остается неясным.

Часть экспериментальная

Таблица температур плавления хлор-никотиновых кислот и смешанных проб между ними.

		α-хлор никотиновая кислота из α-амино-никотиновой кислоты	α′-хлор-никотиновая кислота из α′-окси-никотиновой кислоты с темп. пл. 303—304°
	Темп. пл.	191—192°	199°
		Темп. пл. смешанных проб	
α-хлор-никотиновая кислота из хлор-анабазина с темп. пл. 58.5—59.5°	192.5°	192° (депрессии нет)	180—184° * (депрессия)
α′-хлор-никотиновая кислота из хлор-анабазина с темп. пл. 99.5—100°	198—199°	170—174° (депрессия)	198° (депрессии нет)

α′-хлор-N-метил-анабазин. Смесь 3.7 г α′-хлор-анабазина с темп. пл. 99.5—100°, 2.0 г 35% водного раствора формальдегида и 1.05 г муравьиной кислоты нагревались на водяной бане до полного прекращения выделения газов; при этом образовалось два слоя. Реакционная смесь по охлаждении была вылита в 40% водный раствор едкого кали и извлечена эфиром. Эфирный экстракт был высушен над прокаленным поташем, и затем эфир отогнан. Остаток — желтоватое масло — перегнан в вакууме при 16 мм, причем все перегналось при 160—162°. При стоянии дестиллат закристаллизовался. Отжатые на фарфоровой тарелке кристаллы

* В другой пробе 160—170°.

плавились при 46—47°. Выход 71.5% теоретического. α′-хлор-N-метил-анабазин растворим легко во всех растворителях.

Анализ. Навеска 0.1236 г; получено N_2 14.76 см³ (24°,747.7 мм)
$C_{11}H_{15}N_2Cl$: вычислено N 13.29%; найдено N 13.10

Пользуемся случаем и здесь принести благодарность проф. О. А. Зейде, любезно предоставившему нам синтезированную им α-хлор-никотиновую кислоту.

Лаборатория по изучению и синтезу растительных и животных веществ.
Академия Наук СССР. Москва.

Поступило
1 II 1935.

CHEMISTRY

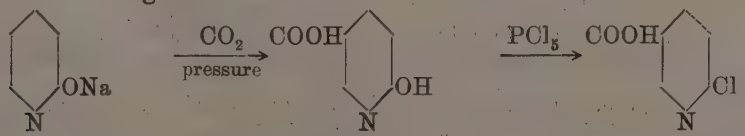
AMINATION OF ALKALOIDS WITH SODIUM AND POTASSIUM AMIDES

By M. I. KABATSCHNIK and M. M. KATZNELSON

III. THE STRUCTURE OF CHLORO-ANABASINE ISOMERS

(*Communicated by A. E. Favorskij, Member of the Academy, 1. II. 1935*)

In our paper on the amination of anabasine with sodium amide (1) we described two isomers of chloro-anabasine I and II. α-chloro-anabasine I was obtained by diazotization of α-amino-anabasine, melting point 89.5—90°, with sodium nitrate in an aqueous solution saturated with HCl. Its melting point was 58.5—59.5° C and boiling point 126° C at 1 mm. α′-chloro-anabasine II was obtained by diazotization of α′-amino-anabasine, melting point 109°, under similar conditions. Its melting point was 99.5—100° C. The structure of both isomers was established by oxidizing them with potassium permanganate. α-chloro-anabasine I yielded on oxydation α-chloro-nicotinic acid III, melting point 192—193°, and α′-chloro-anabasine II gave the isomeric α′-chloro-nicotinic acid IV, melting point 197—198° C.* In view of the melting points of the isomeric chloro-nicotinic acids being very close and of the difficulty in determining their precise melting temperatures (both acids in case of an insufficiently rapid heating in a capillary tube decompose at a temperature of about 185° C without melting), we synthesized α′-chloro-nicotinic acid for comparison with our acids. The run of the synthesis of that acid demonstrated its structure to be unquestionably that of para-chloric acid. We effected the synthesis after the following scheme.



Na-salt of α-pyridone

α′-oxy-nicotinic acid, m. p. 303—304°

α′-chloro-nicotinic acid, m. p. 198°

* According to Pechmann (2), the m. p. of α′-chloro-nicotinic acid is 199°, that of α-chloro-nicotinic acid according to A. E. Tschitschibabin and A. V. Kirsanov (3) is 193° and according to O. Seide—193° (5).

The first reaction has been described by A. E. Tchitchibabin and A. V. Kirsanov [6] and unquestionably results in α′-oxy-nicotinic acid. The second reaction, made after Pechmann [2], unquestionably yields α′-chloro-nicotinic acid.

A comparison of this synthetic α′-chloro-nicotinic acid with our chloro-nicotinic acids showed our determination of the structure of chloro-anabasine isomers to be correct. So α′-chloro-nicotinic acid IV obtained from chloro-anabasine and having m. p. 99.5—100° gave no depression of its melting point in a sample mixture with synthetic α′-chloro-nicotinic acid, while α-chloro-nicotinic acid III obtained by oxidizing chloro-anabasine, m. p. 58.5—59.5°, showed a considerable depression of the melting point in a sample mixture with the same acid. We therefore considered the question of the structure of chloro-anabasine isomers as finally settled.

In the August issue of the „Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft" there appeared a paper by G. Menšikov, A. Grigorovič, and A. Orechov [4] on oxidation of anabasine, in which the following series of transformations is described:

Anabasine → benzoyl-anabasine → benzoyl-anabasine methiodide → N-methyl-benzoyl-anabasone → N-methyl-anabasone → chloro-anabasine.

The authors ascribe an alpha-chloro-anabasine structure to the chloro-anabasine obtained, on the basis of its oxidation into alpha-chloro-nicotinic acid. This oxidation, however, is not described in the experimental part. The chloro-anabasine obtained by them boils at 159—164° at 10 mm and its melting point is 98—99° C. By comparing the constants and properties of this chloro-anabasine with those of our chloro-anabasines, it is easy to establish its identity with our α′-chloro-anabasine, whose melting point is 99.5—100° C, but nowise with α-chloro-anabasine, whose melting point is 58.5—59.5° C. Thus, these authors were dealing with α′-chloro-anabasine, which was erroneously considered by them as being α-chloro-anabasine. It follows, therefore, that the whole series of products wherefrom this chloro-anabasine was obtained was an α′ and not an α series of anabasine derivatives.

The second series of reactions described by G. Menšikov, A. Grigorovič, and A. Orechov is represented by the following scheme:

Anabasine → methyl-anabasine-methiodite → N, N′-dimethyl-anabasone → N-methyl-chloro-anabasine.

These authors likewise ascribe a N-methyl-chloro-anabasine structure to the methyl-chloro-anabasine obtained. This statement is experimentally based by these investigators on the fact that on the oxidation of this methyl-chloro-anabasine one obtains chloro-nicotinic acid, m. p. 193°, which corresponds to alpha-chlor-acid. The authors state that they melted the acid obtained in a sample mixture with α-chloro-nicotinic acid. But they do not state either the method whereby the acid was obtained or its melting point.

In view of the above-mentioned unreliability of determinations of the melting points of isomeric chloro-nicotinic acids, when they are not accompanied by the melting of sample mixtures with synthetic acids of definite structure, one is compelled to regard very critically the arguments set forth by Menšikov, Grigorovič, and Orechov concerning the structure of methyl-chloro-anabasine. Unfortunately, we had an insufficient quantity of α-chloro-anabasine (m. p. 58.5—59.5°) and so could not methylate it and

compare the properties of N-methyl-α-chloro-anabasine with those of the substance described by the above authors. Methylation of α′-chloro-anabasine (m. p. 99.5—100°) gave us N-methyl-α′-chloro-anabasine differing in its properties from Menšikov's methyl-chloro-anabasine. While our N-methyl-α′-chloro-anabasine is a crystalline substance with m. p. 46—47° and b. p. 160—162° at 16 mm, the methyl-chloro-anabasine obtained by Menšikov, Grigorovič, and Orechov, has a boiling point 132—135° at 6 mm, but does not crystallize at all. It is difficult to decide whether the cause of the difference in properties of these products is the isomerism of their structure or whether this difference has to be explained by these workers having had an insufficiently pure product, which was therefore incapable of crystallizing.

After our work has been finished, we once more succeeded in confirming the structure of the isomeric chloro-anabasines by comparing α- and α′-chloro-nicotinic acids obtained by the oxidation of chloro-anabasines with α-chloro-nicotinic acid produced synthetically, thus precluding all doubt as to its structure.

Prof. O. A. Seide kindly supplied us with α-chloro-nicotinic acid synthesized by him after the following method:*

Quinolinic acid → α-amino-nicotinic acid → α-chloro-nicotinic acid.

A comparison of this synthetic α-chloro-nicotinic acid with the chloro-nicotinic acids derived by oxidizing chloro-anabasines once more showed the chloro-anabasine whose melting point is 99.5—100° to be an α′-chloro-anabasine and the chloro-anabasine whose melting point is 58.5—59.5° an α-chloro-anabasine.

Thus, our final conclusions concur with the initial data obtained by us: 1) the chloro-anabasine whose m. p. is 99.5—100°, identical with that of Menšikov, Grigorovič, and Orechov (m. p. 98—99°), is an α′-chloro-anabasine and not an α-chloro-anabasine, as these authors erroneously believe; 2) the chloro-anabasine whose m. p. is 58.5—59.5° is an α-chloro-anabasine; 3) the N-methyl-chloro-anabasine whose m. p. is 46—47° is an N-methyl-α′-chloro-anabasine; 4) the structure of the methyl-chloro-anabasine obtained by Menšikov, Grigorovič, and Orechov by the oxidation of methyl-anabasine-methiodite, is not clear.

We take advantage of this occasion to once more express our thanks to Prof. O. A. Seide for his having kindly supplied us with the synthetic α-chloro-nicotinic acid prepared by him.

Laboratory for the Investigation and Synthesis of Vegetable and Animal Substances, Academy of Sciences of the USSR. Moscow.

Received 1. II. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

[1] М. М. Кацнельсон и М. И. Кабачник, ДАН, I, № 7, 406 (1934). M. Katznelson u. M. Kabatschnik, C. R. Acad. Sci. URSS, I, № 7, 409 (1934). — М. И. Кабачник и М. М. Кацнельсон, ДАН, IV, № 1—2, 44 (1934). M. Kabatschnik u. M. Katznelson, C. R. Acad. Sci. URSS, IV, № 1—2, 47 (1934). [2] Pechmann, Ber., **17**, 2390. [3] А. Е. Чичибабин и А. В. Кирсанов, Ж., **56**, 166 (1925). A. E. Tschitschibabin and A. V. Kirsanov, Journ. of Russ. Phys.-Chem. Soc., **56**, 166 (1925). [4] Ber., **67**, 1398 (1934). [5] O. Seide B., **57**, 1802 (1924). [6] А. Е. Чичибабин и А. В. Кирсанов. Ж., **56**, 174 (1925). A. E. Tschitschibabin and A. V. Kirsanov, Journ. of Russ. Phys.-Chem. Soc., **56**, 174 (1925).

---

* Unpublished paper.

ХИМИЯ

А. Л. КЛЕБАНСКИЙ и К. К. ЧЕВЫЧАЛОВА

СИНТЕЗ β-ХЛОР-ПРОПИОНОВОЙ КИСЛОТЫ ПУТЕМ КОНДЕНСАЦИИ ФОСГЕНА С ЭТИЛЕНОМ

(*Представлено академиком А. Е. Фаворским 25 I 1935*)

Реакция конденсации фосгена с непредельными углеводородами была описана впервые Харниц-Харницким в 1864 г. Впоследствии эта реакция конденсации этилена с фосгеном под действием солнечного света была проведена Липпманом (1). Бертело (2) тщательным образом проверил эти реакции и не в состоянии был их воспроизвести. После этого в изучении этого вопроса наступает длительный перерыв вплоть до 1925 г., когда появилась статья Паче (3). Автор провел эту реакцию для целого ряда органических соединений в присутствии катализатора $AlCl_3$, применяя раствор фосгена в толуоле.

В 1932 г. работа Паче была подвергнута в Центральной американской лаборатории Standard Oil Company двумя авторами (K. Frölich и G. Wieczewich) (4), но их усилия воспроизвести эти реакции были безуспешны. За последнее время эта реакция была проверена С. Л. Варшавским и Е. А. Дороганевской (5) в растворе как толуола, так и CCl_4, однако им не удалось обнаружить и следов хлорангидрида β-хлор-пропионовой кислоты. Как видно из приведенной литературы, вопросы конденсации фосгена с олефинами являются старыми. Нас эта реакция заинтересовала как метод синтеза жирных кислот, базируясь, с одной стороны, на весьма доступных олефинах, получающихся в виде значительных отходов при крэкинге нефти из коксовых газов, а с другой стороны, на весьма легко синтезируемом фосгене. Мы расчитывали, таким образом, получить хлорангидриды β-хлорзамещенных кислот, как низко, так и высоко молекулярных.

Для последних исходным материалом могут служить бензин крэкинга и продукты сухой перегонки сланцев и бурых углей.

Хлорангидриды β-хлорзамещенных кислот являются соединениями весьма неустойчивыми и легко отщепляют HCl с образованием непредельных кислот. От последних нетрудно было бы перейти к эфирам, как предельных, так и непредельных кислот, путем гидрирования непредельных. Мы начали исследование с этилена, чтобы на наиболее простом объекте установить принципиальную возможность конденсации фосгена с олефинами. Работа была начата с проверки данных Паче. Ряд опытов, проведенных в самых различных условиях, показал, что реакция идет в сторону конденсации фосгена с толуолом с образованием парадитолил-кетона, а с другой стороны с этиленом с образованием этил-толуола. β-хлор-пропионовой кислоты или хлорангидрида этой кислоты обнаружить в продуктах реакции не удалось. Изменение условий реакции (температуры, количества катализатора, концентрации фосгена) не меняет положения дела. Это и следовало ожидать, если учесть реакционную способность толуола и фосгена в реакции Фриделя и Крафтса.

Замена толуола другими растворителями CCl_4 или хлорбензолом также не достигает цели. Был проведен ряд опытов конденсации этилена с жидким фосгеном, но в этих условиях не удается получить более или менее заметных количеств β-хлор-пропионовой или акриловой кислоты.

Не дали результатов также опыты конденсации фосгена с этиленом в газовой фазе в присутствии катализатора или при освещении. Был проведен ряд опытов конденсации под давлением 20—25 атм., причем мы варьировали продолжительность реакции от 7 до 24 часов, температуру от +34 до —9°.

Мы приводили реакцию при перемешивании и без перемешивания. В большинстве опытов реакция конденсации не прошла, и только в отдельных опытах удалось получить из водных растворов сравнительно немного органических кислот. Последние были выделены в виде натриевых солей, которые высушивались до постоянного веса при температуре 118—120°. Сухие соли были этерфицированы действием HCl в абсолютном метиловом спирте на холоду. Полученный продукт по точке кипения соответствует метиловому эфиру хлор-пропионовой кислоты. Однако анализ на хлор дает несколько преуменьшенный результат. Очевидно, эта фракция является смесью продуктов, в которой имеется некоторое количество указанного эфира, около 66%, судя по количеству хлора. Опыты выделения чистого продукта из этой смеси были безуспешны. Неудачны были также наши попытки провести реакцию конденсации фосгена с этиленом под действием хлористого цинка в целом ряде растворителей.

При этом получаются, главным образом, высокомолекулярные смолистые продукты полимеризации этилена. Более успешные результаты были получены при проведении этой реакции в сероуглеродном растворе в присутствии катализатора $AlCl_3$. При этом наблюдается образование характерного тяжелого темного слоя, который резко отделялся от верхнего слоя сероуглерода.

Как было установлено, в этом слое содержался весь продукт реакции вместе с $AlCl_3$. Была проведена серия опытов с $AlCl_3$ в растворе сероуглерода, причем изменялись молекулярные концентрации катализатора $AlCl_3$. Были взяты концентрации в 1 моль, 0.5 моль, 0.25 моль, 0.1 моль, 0.05 моль. Также варьировалась температура. Реакция велась при охлаждении ниже 0° С и при комнатной температуре, а также при температуре 30—35°, которая достигалась за счет теплоты реакции. Были установлены следующие оптимальные условия реакции: количества $AlCl_3$—0,5 моля, температура ниже 0°, при условии постепенной подачи в растворе CS_2 как фосгена, так и $AlCl_3$. Продукты выделены двумя различными методами. 1) После отгонки при комнатной температуре комплекс разлагался ледяной водой, и кислоты отгонялись с перегретым водяным паром. Температура перегрева 160°. Водные погоны содержали смеси органических кислот и HCl, разделение которых представлялось невозможным, если учесть чрезвычайную растворимость в воде β-хлор-пропионовой или акриловой кислоты. С целью выделения органических кислот была применена следующая методика: дестиллят с перегретым паром нейтрализовался до слабо-щелочной реакции, выпаривался досуха и высушивался до постоянного веса при температуре 100—105°. Смесь солей NaCl и органических кислот подвергалась этерфикации путем пропускания сухого HCl газа в абсолютно спиртовой суспензии солей.

Выход эфира из расчета на количество взятых солей составляет только около 20—30% по теории, в пересчете на сырой продукт. Эфир по анализу и температуре кипения соответствует β-хлор-пропионовой кислоте. Так как этот вариант переработки дает неудовлетворительные результаты, был применен другой метод.

Комплексное соединение после отделения от сероуглерода и отгонки избыточного фосгена разлагалось абсолютным спиртом при охлаждении

ниже 0°. Избыток спирта отгонялся, и остаток разлагался водой, насыщенной NaCl. Сложный эфир извлекался серным эфиром.

После переработки экстракта удается выделить фракцию, соответствующую метиловому эфиру β-хлор-пропионовой кислоты. Продукт несколько загрязнен сернистыми соединениями и обладает неприятным запахом. От этих примесей не было возможности избавиться даже перегонкой над металлическим натрием, и погон дает положительную качественную реакцию на содержание серы. При стоянии продукт разлагается с выделением свободного HCl, которое особенно усиливается при разгонке без вакуума. После двукратной разгонки удается получить продукт, совершенно свободный от хлора, отвечающий по анализу и другим константам метиловому эфиру акриловой кислоты. С целью идентификации полученный эфир был омылен, и соли были обработаны тионилхлоридом.

Полученный хлорангидрид кислоты обработан анилином при охлаждении. Получен анилид с температурой плавления 104°, что соответствует точке плавления анилида акриловой кислоты. Выход эфиров β-хлор-пропионовой кислоты колеблется от 20 до 30% в пересчете на сырой эфир. В пересчете же на очищенный, перегнанный эфир, он составляет 15—20%.

Таким образом с несомненностью удалось установить реакцию конденсации фосгена с этиленом с образованием β-хлор-пропионовой кислоты и разработан метод разложения комплекса и выделение продукта реакции.

В заключение считаем своим приятным долгом выразить благодарность акад. А. Е. Фаворскому за его ценные советы и указания.

Лаборатория органической химии
Государственного института прикладной химии.
Ленинград.

Поступило
25 I 1935.

CHEMIE

SYNTHESE DER β-CHLORPROPIONSÄURE DURCH KONDENSATION VON PHOSGEN MIT ÄTHYLEN

Von A. L. KLEBANSKIJ und K. K. ČEVYČALOVA

(*Vorgelegt von A. E. Favorskij, Mitglied der Akademie, d. 25. I. 1935*)

Die Kondensation von Phosgen mit ungesättigten Kohlenwasserstoffen wurde zuerst von Harnitz-Harnitzky im Jahre 1864 beschrieben. Später wurde diese Kondensation des Äthylens mit Phosgen unter Einwirkung von Sonnenlicht durch Lippmann(1) ausgeführt. Berthelot(2) hat diese Reaktionen sorgfältig geprüft, war aber nicht imstande, selbige zu reproduzieren. Darauf tritt in der Erforschung dieser Frage eine längere Unterbrechung ein, die sich bis z. j. 1925 hinzog, als eine diesbezügliche Abhandlung von Pace erschien. Letzterer Autor führte diese Reaktion für eine ganze Reihe organischer Verbindungen in Gegenwart von $AlCl_3$ als Katalysator durch und benutzte hierbei eine Lösung von Phosgen in Toluol.

Im Jahre 1932 wurde die Arbeit von Pace im Amerikanischen Zentral-Laboratorium der Standard Oil Co durch K. Frölich und P. Wieczewich(4) einer Prüfung unterzogen, jedoch blieben ihre Bemühungen, diese Reak-

tionen zu reproduzieren, erfolglos. Neuerdings wurde diese Reaktion von Warschawski und E. A. Dorogajenskaja (5) sowohl in Toluol- als auch in CCl_4-Lösung nachgeprüft; es gelang ihnen jedoch nicht einmal Spuren von Chloranhydrid der β-Chlorpropionsäure zu entdecken. Wie aus der angeführten Literatur hervorgeht, sind die Fragen der Kondensation des Phosgens mit den Olefinen keine neuen mehr. Uns interessierte diese Reaktion als Methode zur synthetischen Herstellung von Fettsäuren, bei der als Ausgangsprodukte einerseits die recht zugänglichen Olefine, welche in bedeutenden Mengen aus Koksgasen beim Kraken der Naphtha abfallen, anderseits das verhältnismässig leicht synthesierbare Phosgen verwendet werden können. Wir glaubten auf diese Weise Chloranhydride sowohl von niedrig- als hochmolekularen β-chlorsubstituierten Säuren zu gewinnen.

Für letztere können als Ausgangsmaterialien das Benzin des Krakprozesses, sowie auch die Produkte der trockenen Destillation der Schiefer nnd Braunkohlen benutzt werden.

Die Chloranhydride der β-chlorsubstituierten Säuren sind recht unbeständige Verbindungen und spalten leicht HCl ab unter Bildung von ungesättigten Säuren. Von den letzteren konnte man leicht zu Estern sowohl der gesättigten als auch der ungesättigten Säuren durch Hydrierung der ungesättigten übergehen. Wir begannen die Untersuchung mit Äthylen, um an dem einfachsten Objekt die prinzipielle Möglichkeit einer Kondensation des Phosgens mit Olefinen festzustellen. Die Arbeit wurde mit einer Nachprüfung der Angaben von Pace begonnen. Eine Reihe von Versuchen, die unten den verschiedensten Bedingungen ausgeführt wurden, zeigte, dass die Reaktion in der Richtung der Kondensation von Phosgen mit Toluol unter Bildung von *p*-Ditolylketon verläuft, und andrerseits mit Äthylen unter Bildung von Äthyltoluol. β-Chlorpropionsäure oder deren Chloranhydrid konnte in den Reaktionsprodukten nicht festgestellt werden. Durch Variierung der Reaktionsbedingungen — wie der Temperatur, der Menge des Katalysators, der Konzentration des Phosgens — wird an der Sache nichts geändert. Dieses musste auch erwartet werden, wenn man die Reaktionsfähigkeit des Toluols und des Phosgens in der Friedel-Kraft'schen Reaktion in Betracht zog.

Auch ein Ersatz des Toluols durch irgend welche andere Lösungsmittel, wie CCl_4 oder Chlorbenzol, führt nicht zum Ziel. Es wurde eine Reihe von Versuchen betreffs Kondensation des Äthylens mit flüssigem Phosgen angestellt; es gelang jedoch nicht, nennenswerte Mengen von β-Chlorpropion- oder Akrylsäure unter diesen Bedingungen zu erhalten.

Resultatlos verliefen desgleichen die Versuche, Phosgen mit Äthylen in gasförmiger Phase bei Vorhandensein eines Katalysators oder bei Beleuchtung zu kondensieren. Es wurde eine Reihe solcher Kondensationsversuche unter einem Druck 20—25 atm. ausgeführt, wobei wir die Reaktionsdauer innerhalb 6 und 24 Stunden, die Temperatur innerhalb +34 und —9° variierten.

Wir führten die Reaktion unter Rühren und ohne Rühren durch. In den meisten Versuchen blieb eine Kondensation aus, und nur in einzelnen Versuchen gelang es, aus den wässrigen Lösungen verhältnismässig geringe Mengen organischer Säuren zu gewinnen. Letztere wurden in Form ihrer Natriumsalze isoliert, die bei einer Temperatur von 118—120° bis zur Gewichtskonstanz getrocknet wurden. Die trockenen Salze wurden darauf bei Kälte durch HCl in absolutem Methylalkohol esterifiziert. Dem Siedepunkt nach entspricht das entstandene Produkt dem Methylester der Chlorpropionsäure. Die Chlorbestimmung zeigt jedoch ein etwas vermindertes

Resultat. Offenbar stellt diese Fraktion ein Gemisch von Produkten dar, in welchem auch eine gewisse Menge des obenerwähnten Esters enthalten ist (nach der Menge des Chlors zu urteilen — ca. 66%). Versuche, das reine Produkt aus diesem Gemisch zu isolieren, blieben erfolglos. Ebenso erfolglos waren auch die Versuche, Phosgen mit Äthylen unter Einwirkung einer Lösung von Zinkchlorid in einer ganzen Reihe von Lösungsmitteln, zu kondensieren.

Es entstehen hierbei hauptsächlich hochmolekulare, harzige Polymerisationsprodukte des Äthylens. Erfolgreicher verlief diese Reaktion bei Anwendung von Schwefelkohlenstoff als Lösungsmittel und in Gegenwart von $AlCl_3$ als Katalysator. Es tritt hierbei eine charakteristische schwere, dunkle Schicht auf, die sich scharf von der oberen Schwefelkohlenstoffschicht abtrennte.

Wie festgestellt wurde, war in dieser Schicht das gesamte Reaktionsprodukt zusammen mit $AlCl_3$ enthalten. Es wurde eine Reihe von Versuchen mit $AlCl_3$ als Katalysator und mit Schwefelkohlenstoff als Lösungsmittel unternommen, wobei man die Molekularkonzentrationen des Katalysators $AlCl_3$ änderte, und zwar kamen die Konzentrationen 1 Mol., 0.5 Mol., 0.25 Mol., 0.1 Mol. 0.05 Mol. zur Anwendung. Variiert wurde auch die Temperatur: man führte die Reaktion bei Abkühlung unter Reaction bei 0°, bei Zimmertemperatur und bei einer Temperatur von 30—35° C durch, die auf Kosten der Reaktionswärme erzeugt wurde. Es wurden folgende optimale Reaktionsbedingungen festgestellt: Menge des Katalysators $AlCl_3$ — 0.5 Mol., Temperatur unter 0° und allmähliche Einführung von Phosgen und $AlCl_3$ in die Cl_2-Lösung. Die Produkte wurden auf zweierlei Weise ausgeschieden: 1) nach Abdestillieren bei Zimmertemperatur zersetzt man den Komplex mit Eiswasser, worauf die Säuren mit überhitztem Wasserdampf abdestilliert wurden. Die Überhitzungstemperatur lag bei 160°. Die wässrigen Fraktionen enthielten Gemische von organischen Säuren und HCl, deren Trennung infolge der bedeutenden Löslichkeit der β-Chlorpropionsäure oder Akrylsäure unmöglich war. Zur Abscheidung der organischen Säuren wurde folgende Methode angewandt; das mit überhitztem Dampf übergegangene Destillat wurde bis zur schwach alkalischen Reaktion neutralisiert, zum Trocknen eingedampft und auf Gewichtkonstanz bei 100—105° getrocknet. Das Gemisch der Salze NaCl und der organischen Säuren wurde einer Esterifikation durch Einleitung von trockenem HCl-Gas in die Suspension der Salze in absolutem Alkohol unterworfen. Die Ausbeute des Esters betrug ca. 20—30%, umgerechnet auf das rohe Produkt. Der Analyse nnd Siedetemperatur nach entspricht der Ester der β-Chlorpropionsäure. Da diese Methode unbefriedigende Resultate ergab, wurde eine andere angewandt.

Die Komplexverbindung wurde, nach Trennung vom Schwefelkohlenstoff und Abdestillierung des überschüssigen Phosgens, durch absoluten Alkohol bei Abkühlung unter 0° zersetzt. Der überschüssige Alkohol wurde abdestilliert und der Rest durch Wasser zersetzt, welches mit NaCl gesättigt war. Der Ester wurde sodann mit Schwefeläther extrahiert.

Nach entsprechender Behandlung des Extrakts gelingt es, eine Fraktion zu isolieren, die dem Methylester der β-Chlorpropionsäure entspricht. Das Produkt ist durch Schwefelverbindungen etwas verunreinigt und besitzt einen unangenehmen Geruch. Diese Beimengungen liessen sich selbst durch Destillation mit metallischem Natrium nicht entfernen; die überdestillierte Masse zeigte eine positive Reaktion auf Schwefel. Beim Stehen zersetzte sich das Produkt unter Ausscheidung von freiem HCl,

welche bei Destillation ohne Vakuum stärker wird. Nach zweimaliger Destillation gelingt es, ein völlig chlorfreies Produkt zu erhalten, welches nach der Analyse und den anderen Konstanten dem Methylester der Alkylsäure entspricht. Um den gewonnenen Ester zu identifizieren, wurde er verseift und die Salze mit Thionylchlorid behandelt.

Das gewonnene Chloranhydrid der Säure wurde mit Anilin unter Abkühlung behandelt. Es bildete ein bei 104° schmelzendes Anilid, was dem Schmelzpunkt des Anilids der Akrylsäure entspricht. Die Ausbeute der β-Chlorpropionsäurester schwankte zwischen 20—30%, berechnet auf das rohe Produkt. Bei Umrechnung auf gereinigten, destillierten Ester dagegen beträgt die Ausbeute 15—20%.

Es gelang somit, die Bildung von β-Chlorpropionsäure bei der Kondensation von Phosgen und Äthylen festzustellen, und eine Methode auszuarbeiten, die eine Zersetzung des Komplexes und eine Isolierung des Reaktionsproduktes gestattete.

Zum Schluss ist es uns eine angenehme Pflicht, dem Professor A. E. Favorskij für seine wertvolle Anleitung unseren Dank auszusprechen.

Laboratorium für organische Chemie.
Staatliches Institut für angewandte Chemie.
Leningrad.

Eingegangen
d. 25. I. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] Lippmann, L. Annalen, **129**, стр. 85. [2] Berthelot, Bull. Soc. chim., 1870. [3] Pace, Gazz. Chim. Ital., 1929, 578 (C., 1930, I, 213). [4] K. Frölich and P. Wieczewich, Ind. and Eng. Chem., 1, 1932, 13. [5] S. L. Warschawski ed E. A. Dorogajenskaja, Gazz. Chim. Ital., **64**, 53—59, Jan. 1934.

ГЕОХИМИЯ

П. Р. БОРОДИН и М. Г. ГАДД

ИССЛЕДОВАНИЕ РАДИОАКТИВНОСТИ ИСТОЧНИКОВ ИЛЬМЕНСКОГО РАЙОНА И ОЗ. ТУРГОЯК (ЮЖНЫЙ УРАЛ)

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 13 II 1935)

По предложению Уральского филиала Центрального института курортологии нами* были произведены исследование радиоактивности источников в районе оз. Тургояк и исследование радиоактивности самого озера.

Филиал был заинтересован не столько в точном определении радиоактивности того или другого источника, сколько в выделении наиболее сильных из них и ценных в лечебном отношении. Работа велась исключительно на содержание эманации радия и шла в двух направлениях: 1) измерение активности оз. Тургояк, 2) измерение активности источников, главным образом Тургоякского района, и одного источника, лежа-

* Несколько измерений радиоактивности как озера, так и воды источников проделано третьим участником экспедиции Л. И. Розенгард.

щего по Миассовой дороге в Ильменском государственном заповеднике и показавшего в 1930 г. сильную активность.

Раньше чем привести результаты измерений, укажем метод измерений.

Для зачерпывания воды с поверхности служил жбан фирмы Шпиндлера и Гойера. Жбан этот погружался в воду, причем отверстие крана, через который выходил воздух из жбана, находилось в воздухе. Через несколько секунд после погружения жбан закрывался под водой пробкой, быстро вынимался, встряхивался $1^1/_2$—2 мин. и немедленно присоединялся к эманационным камерам электроскопов.

Каучуки, хлоркальциевые трубки и соединительные трубки были приспособлены уже заранее. Немедленно в течение 2 мин. производилось продувание эманации.

Промерка в зависимости от распределения работы производилась через 2—4 часа, или тут же подле источника или же на дому. В зависимости от того, где назначалась промерка источника, натуральное рассеяние измерялось или дома или подле самого источника.

Расчет велся по формуле $R = \frac{icv_2}{v_1}$, где R — количество эманации в единицах Махе на 1 л воды, i — ионизационный ток при измерении пробы в делениях шкалы, v_1 — объем воды, v_2 — объем воздуха в системе пробы и c — постоянная прибора.

Эта формула и постоянная прибора были выведены из следующих соображений.

Пусть при градуировке прибора эталоном объем воздуха в системе эталона — v_0, ионизация при градуировке — i_0, % накопления эманации — p, объем эманационной камеры — w, количество радия в эталоне, выраженное в кюри — a.

Высчитаем, скольким делениям соответствует 1 кюри.

Принимая во внимание процент накопления, можно сказать, что в эталоне находится: $\frac{ap}{100}$ кюри, а в ионизационной камере — $\frac{apw}{100v_0}$ кюри.

Это количество кюри соответствует i_0 делениям, откуда одному кюри соответствует $\frac{i_0 100 v_0}{apw}$ делений.

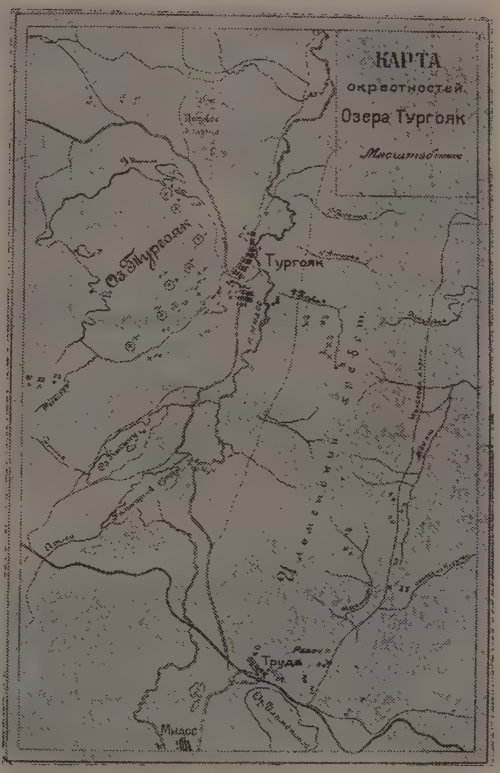
Далее пусть при промерке пробы: i — ионизация, даваемая пробой, v_1 — объем воды, v_2 — объем воздуха в системе, v_3 — объем воздуха в жбане.

Если ионизация в объеме ионизационной камеры получилась i, то она должна соответствовать $A = \frac{iapw}{i_0 100 v_0}$ кюри. Но так как эманация после продувания распределилась равномерно по всей системе, то во всей системе имеется $\frac{Av_2}{w}$ кюри, т. е. $\frac{iapwv_2}{i_0 100 v_0 w}$ кюри или $\frac{iapv_2 1000}{i_0 100 v_0 v_1 3.6 \cdot 10^{-10}}$ махе. Принимая в данной формуле для данной градуировки множитель $\frac{ap 1000}{i_0 100 v_0 3.6 \cdot 10^{-10}} = C$ за постоянную, имеем для вычисления количества эманации в единицах Махе формулу $R = \frac{civ_0}{v_1}$. В данную формулу нами была введена поправка на поглощение эманации водой в зависимости от температуры.

Для этой поправки мы пользовались формулой $R_t = R_0 \left(1 + \alpha \frac{v_1}{v_3}\right)$, где α коэффициент поглощения эманации водой.

1. Измерение активности озера Тургояк

Измерение активности оз. Тургояк было произведено в различное время дня и при различных метеорологических условиях 17 раз. Пробы брались как в середине озера, так и у берегов. Девять раз пробы брались с поверхности озера и восемь раз с глубины 7—18 м. Поверхностные пробы отмечены на карте крестиками, а глубинные кружочками. Исследования велись на разных электрометрах, так как текущая работа не позволяла выделить специального прибора для этой цели. Эманация продувалась в ионизационные камеры на месте взятия (в лодке), а ток ионизации, как и натуральное рассеяние, измерялся дома. Результаты измерений сводятся к следующему.



Из 17 наблюдений как поверхностных, так и глубинных только одно дало 0.97 махе, но проба была взята во время сильного дождя, и, возможно, этот повышенный результат следует приписать каким-нибудь случайным явлениям. Что касается остальных измерений, то хотя половина из них и дала активность от 0.18 до 0.5 махе, но результаты нельзя считать надежными: многие наблюдения шли в пределах ошибок. Во всяком случае активности, ценной в лечебном отношении, не обнаружено.

Для точного определения как активности воды озера, так и местонахождения подводных выходов радиоактивных источников, если таковые имеются, требуются более точные методы и более чувствительные приборы.

2. Исследование активности источников

Ввиду краткости времени и особенно отсутствия транспорта мы не смогли вести систематических наблюдений над источниками, и большинство источников было промерено нами по одному разу. Дебит указан только для двух наиболее активных источников.

Исследованные источники можно было разбить на следующие районы: 1) источники в районе сел. Тургояк (№№ 1—9, 14 и 20); 2) источники вблизи Варгановой горы к северу от оз. Тургояк (№№ 10—13); 3) источники у Малого Ильменя (№№ 15—19); 4) источники у Пугачевой горы к юго-за-

Результаты измерений активности источников

№	Температура воды	Температура воздуха	Активы в махе	Примечания	№	Температура воды	Температура воздуха	Активы в махе	Примечания
1	8°		10.6		14	5.6	19.6	3.5	
1	7	25°	3.9	В 15—20 м от выхода	15	7	22	18	
2	6	18	0.43	Колодец	16	5	22	50.4	Дебит 4 л/мин.
3	6.5	23	—		17	6	22	8.2	
4	4	23	3.6		18	5	23	41.4	
5	6.5	16.6	15		19	6	22	15.8	
6			3.9		20	6	20	—	
7	6	23	2.3		21	8	21	19.2	Выхода источника не обнар.
8	5		12.08	Заболочен	22	6	23	33.3	
9	5.5	22	3.02	Колодец	23	8	20	18	Заболочен; выхода не найд.
10	6	19	13.5		24	7	21.5	48.9	Колодец
11	6	22	16.1		25	10	23	170	Дебит 10 л/мин.
12	6	19	5.8	Заболочен	26	8	24	220	
13	6.5	19	5.4	Заболочен	27	8	23	224	

паду от оз. Тургояк (№№ 21, 22 и 23); 5) источники у ст. Миасс (№№ 24 и 25); 6) источники у г. Перми (№№ 26 и 27).

В первом районе нами были исследованы почти все источники. Большинство из них находится в селении, и жители берут из них воду. Активность их в среднем не превышает 4 махе, за исключением № 5—15 махе и № 8—12 махе.

Районы II, III и IV, несмотря на то, что они в смысле количества источников исследованы менее подробно и потому приведенные в таблице результаты не дают полной характеристики этих районов, показали гораздо бо́льшую активность, причем эта активность повышается в направлении к Ильменскому хребту.

В V районе наибольшую активность дал источник, расположенный у Миассовой дороги, у поворота к оз. Кисягач, приблизительно в 4 км от ст. Миасс. Источник был исследован Архаровой и Гадд еще в 1930 г. и дал тогда значительную активность (см. „Уральский Техник", 1930 г., № 8-9).

Нами этот источник был промерен два раза. Первая проба показала на электрометре Шмидта 170 махе. Второй раз он был промерен одновременно на электрометре Шмидта и на электрометре Геолснаба, причем на первом электрометре получено 220 махе, а на втором 224 махе.

Как видно из таблицы, наибольшая активность обнаружена в районе Ильменского государственного заповедника, что объясняется присутствием в нем редкоземельных элементов и соединений урана.

Примечание к карте (стр. 49)

Источники, лежащие к северо-востоку от Ильменского озера (в районе Ильменского государственного заповедника), были промерены Архаровой и Гадд в 1930 г. и имеют на карте особую нумерацию. Из них источники №№ 5 и 13 промерены повторно и вошли в таблицу под №№ 25 и 24.

Уральский филиал
Государственного центрального института
курортологии, Свердловск.

Поступило
13 II 1935.

GEOCHEMISTRY

AN INVESTIGATION OF THE RADIOACTIVITY OF THE SPRINGS OF THE ILMEN DISTRICT AND OF LAKE TURGOYAK (SOUTH URALS)

By P. R. BORODIN and M. G. GADD

(Communicated by S. I. Wawilow, Member of the Academy, 13. II. 1935)

SUMMARY

Out of seventeen analyses of the water of the lake, taken both from the surface and from depths of up to 18 metres, only one gave 0.97 mache; however, the samples were taken when it rained hard, so that the high value obtained may be due to some chance phenomena.

Although half of all the other tests showed an activity of from 0.18 to 0.5 mache, these results cannot be considered reliable, for many of the observations were carried out within the limits of possible errors.

In any case, these investigations of lake Turgoyak disclosed no radioactivity of therapeutical importance.

The springs, on the contrary, show high radioactivity, which increases towards the Ilmen chain.

The highest radioactivity (220 mache) was shown by a spring located in the Ilmen mineralogical preserve.

Ural Branch
of the Central Health Resort Institute.
Sverdlovsk.

Received
18. II. 1935.

М. О. КЛЕР

ЗАМЕЧАНИЯ ПО ГИДРОГЕОЛОГИИ ИССЛЕДОВАННЫХ НА РАДИОАКТИВНОСТЬ ИСТОЧНИКОВ И ОЗ. ТУРГОЯК (ЮЖНЫЙ УРАЛ)

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 13 II 1935)

1. В большей своей части воды оз. Тургояк, несомненно, являются атмосферными. Западная половина береговой линии озера состоит из гранитных магм, а восточная — из порфиритовых пород и их туфов, большею частью рассланцованных, и из полосы змеевиков, проходящей вдоль восточной окраины озера среди рассланцованных пород. Условия для возникновения радиоактивности озера в отношении петрографическом особенной благоприятностью не отличаются. Бассейн питания озера очень незначителен, так как на небольшом расстоянии на севере район дренируется речками Каменкой, Б. Павловкой и Куштунгой, текущими на восток к р. Миассу, на западе же речками, тянущимися к р. Аю. На юге воды стекают во впадину оз. Кысы-куль (р. Топкая) и Поликарпова пруда (р. Сыростан-Атлян), т. е. в систему же р. Миасса. Речки-ручьи — Липовка, Бобровка и Пугачевка, притекающие в оз. Тургояк с запада, стекая с гранитного массива, имеют очень небольшой бассейн водосбора. Особенно узка поверхность бассейна оз. Тургояк с востока; воды его стекают через заполненный теперь наносами узкий проток к р. Миассу, долина которого здесь отгорожена от озера узкой змеевиковой грядой.

Таким образом оз. Тургояк отдалено от полей миаскитов Ильменских гор, содержащих радиоактивные минералы, тектонической долиной р. Миасса. Если западный склон миаскитового массива дает выхода радиоактивных вод, последние должны поступать в р. Миасс и уходить вместе с ее тальвежными водами на север.

2. Источник № 25 (№ 5 1930 г.) питается водами, непосредственно выходящими из массива Ильменских гор в зоне контакта нефелиновых сиенитов с большим гранитным полем на востоке и с узкой полоской нормальных сиенитов между ними.

Общий уклон несколько рассланцованных миаскитов восточного склона Ильменских гор направлен на восток и почти совпадает с общим рельефом местности. Происхождение источника № 5 обязано этому нисходящему движению воды по этому общему уклону, если оно не связано с контактовой зоной миаскитов и сиенитов.

Тем же нефелиновым сиенитам, повидимому, обязана повышенная радиоактивность (48 махе) источника № 24.

3. Источники №№ 21, 22 и 23 расположены у восточной окраины гранитного массива западного склона впадины оз. Тургояк, недалеко от контакта его с змеевиками. Их питание связано с фильтрацией вод через толщу гранитов. Повидимому, они находятся в значительной зависимости от сезонов. Аналогичны условия и для источника № 20, лежащего недалеко от зоны контакта гранита и сланцев.

4. Группа источников №№ 10, 11, 12 и 13 к северу от оз. Тургояк на западном склоне Харитоновского болота представляет выход вод, спускающихся из гранитного массива с ЮЗ к котловине болот, связанной с р. Куштунгой. Основанием этой котловины являются порфиритовые сланцы, сильно выветрелые сверху и обусловливающие равнинность дна

этих впадин с дилювиальными отложениями и торфом. Уровни стояния вод во впадине влияют на уровни родников, которые представляют типичные нисходящие воды, зависящие отчасти от сезонов.

5. Группа источников №№ 15, 16, 17, 18 и 19, расположенная на западном склоне Ильменского массива, является характерной для нисходящих вод верхней части продольной сланцеватости и простиранию пород долины р. Первой.

Воды этих источников стекают с восточного склона хребтика Малого Ильменя, в котором нормальные и нефелиновые сиениты одинаково представлены. Повидимому, эти воды должны зависеть от атмосферных осадков.

Радиевая экспедиция Академии Наук, работавшая в течение трех лет по исследованиям радиоактивных материалов в 1912—1914 гг., пришла к выводу, что при очень значительной рассеянности радиоактивных минералов в нефелиновых сиенитах, минералы эти не могут рассматриваться как промышленные месторождения, и что радий, по мнению акад. А. Е. Ферсмана, возможно будет использовать через родниковые воды миаскитового района. Исследования П. Р. Бородина и М. Г. Гадд показали, что радиоактивность этих последних может быть достаточно выражена, чтобы заслуживать практического ее использования.

Конечно, радиоактивному исследованию вод района должно предшествовать общее и детальное исследование грунтовых вод района. По проведении гидрогеологического исследования Ильменских гор можно было бы наметить ориентировочно все естественные выходы грунтовых вод, которые могут быть признаны по условиям их генезиса и выходов на земную поверхность наиболее благоприятными для интенсивности их вод. Здесь придется считаться не только с минералогическим составом горных пород и их трещиноватостью, но и с основными и тектоническими линиями Ильменских гор, т. е. одновременно с гидрогеологическими исследованиями необходимо произвести и специальные тектонические исследования этих гор.

Уральский филиал
Государственного центрального
института курортологии.
Свердловск.

Поступило
13 II 1935.

GEOCHEMISTRY

SOME NOTES ON THE HYDROGEOLOGY OF THE SPRINGS OF THE ILMEN DISTRICT AND OF LAKE TURGOYAK (SOUTH URALS)

By M. O. CLAIRE

(Communicated by S. I. Wawilow, Member of the Academy, 13. II. 1935)

SUMMARY

The conditions prevailing in the lake are not favourable for radioactivity from a petrographical standdpoint.

Moreover, lake Turgoyak is separated from the miascitic area of the Ilmen Mountains containig radioactive minerals by the tectonic valley of the Miass. Even though the western slope of the miascite massif yields radioactive waters, these escape into the river Miass and are carried away with its waters to the north.

The high activity of the springs of the Ilmen mineralogical preserve is due to the presence of rare earth elements and uranium compounds.

Spring No 25 possessing the greatest radioactivity, is fed by the waters coming directly from the Ilmen mountain massif in the contact zone of nepheline syenites with a large granite field. The radioactivity of source No 24 seems to be due to the same nepheline syenites.

The Academy of Sciences Radium Expedition, which carried on investigations of radioactive materials for three years (1912—1914), came to the conclusion that radioactive minerals, being considerably dispersed in nepheline syenites, cannot be considered as industrial deposits, and that the radium may be utilized through the waters of the springs in the miascite area.

Ural Branch of the
Central Health Resort Institute.
Sverdlovsk.

Received
13. II. 1935.

МИНЕРАЛОГИЯ

В. ЛЕВШИН и М. АЛЕНЦЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОСФОРЕСЦЕНЦИИ КАЛЬЦИТОВ

(*Представлено академиком С. И. Вавиловым 21 II 1935*)

Авторы подробно исследовали фосфоресценцию ряда кальцитов, арагонитов и сталактитов.

1. Спектрофотометрически было изучено распределение энергии в спектрах излучения этих минералов при возбуждении свечения ртутной линией 365 mμ. Спектры состоят из широких ($\sim$ 150 mμ) размытых полос, максимумы которых приведены в 4-м столбце таблицы. Различие спектров свечения доказывает, что исследовавшиеся минералы, при одинаковом во всех случаях химическом составе основного вещества ($CaCO_3$), включали, в качестве активаторов, примеси различных тяжелых металлов.

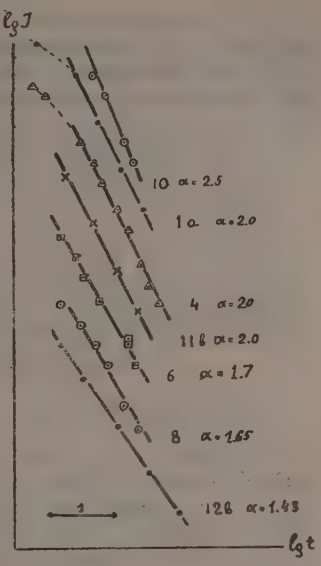
2. Исследовано изменение интенсивности свечения в интервале температур от 20 до 250°. Основная полоса фосфоресценции у всех образцов тухнет при повышении температуры, но ход изменения индивидуален у разных минералов. У одного из образцов (кальцит 5) при повышении температуры обнаружено возникновение новой „горячей" полосы свечения. В 5-м столбце таблицы даны относительные значения интенсивности свечения отдельных минералов, а в столбцах 6—10 изменения интенсивности при повышении температуры от 20 до 240°.

3. Фотометрически исследован закон затухания свечения по прекращении возбуждения. Измерения показали, что гиперболический закон затухания

$$I = At^{-\alpha} \qquad (1)$$

(A и α — константы, I — интенсивность свечения, t — время), установленный ранее [1] для синтетических цинковых фосфоров, оправдывается весьма точно при изменении интенсивности свечения более чем в 100 раз и для всех исследованных минералов, принадлежащих к классу каль-

ц и е в ы х фосфоров. Это обстоятельство существенно, так как при проверке формулы (1) по данным Ленарда, произведенной В. В. Антоновым-Романовским и одним из нас [1], затухание лишь 30% ленардовских фосфоров удовлетворяло формуле (1). Логарифмические прямые затухания приведены на прилагаемой фигуре. Значения α находятся в последнем столбце таблицы.



4. В 3-м столбце таблицы знак шл. означает полированную пластинку минерала, цифры I—II обозначают минерал, размолотый в зерна диаметром соответственно в $\sim$1.5, 0.5 мм; цифрой III обозначается мелкая пыль. Свечение кальцитов и особенно арагонитов сильно падало при раздроблении минерала (некоторые данные приведены в столбце 5). Вместе с тем раздробление уменьшает коэффициент α, т. е. вызывает з а м е д л е н и е затухания (аналогично синтетическим цинковым фосфорам).

№	Минерал Minéral	Обработка Traitement	λ_{max} mμ	I_{20}	I_{50}/I_{20}	I_{100}/I_{20}	I_{150}/I_{20}	I_{200}/I_{20}	I_{240}/I_{20}	α
1a	Кальцит—Calcite .	I	475	1.32	0.92	0.80	0.68	0.58	0.52	2.00
1b	„ .	II	475	1.38						1.60
1c	„ .	III	475	0.96						1.40
2	„ .	шл.	570	0.67	0.92	0.64	0.40	0.24	0.18	2.30
3	„ .	шл.	550	1.8	0.96	0.80	0.50	0.22	0.12	2.00
4	„ .	I	535	1.52	0.94	0.74	0.52	0.40	0.36	2.00
5	„ .	шл.	425	0.2	0.98	0.56	0.16	0.24	1.70	
6	Арагонит—Aragonite	шл.	574	1.0	0.98	0.80	0.61	0.46	0.36	1.70
7	„ .	шл.	570	0.95	0.94	0.76	0.54	0.36	0.30	
8	„ .	шл.	475	0.48	0.82	0.70	0.54	0.40	0.36	1.65
9	„ .	шл.	475	0.35	0.88	0.64	0.44	0.36	0.36	
10	Мрамор—Marbre .	шл.	490	0.65	0.84	0.60	0.44	0.36	0.32	2.50
11a	Сталактит—Stalactite	шл.	485	1.25	0.96	0.84	0.62	0.42	0.28	2.65
11b	„ .	I	485	1.2						2.00
11c	„ .	III	485	0.7						1.43
12a	„ .	I	550	1.1	0.96	0.82	0.58	0.30	0.14	1.43
12b	„ .	II	550	0.85						1.43
12c	„ .	III	550	0.80						1.43
13	„ .	шл.	515	0.31	0.94	0.80	0.64	0.44	0.30	

5. Абсолютные величины α чрезвычайно велики и несравненно выше значений α для соответствующих синтетических фосфоров. Таким образом, затухание минералов идет весьма быстро, обычно падая ниже порога чувствительности человеческого глаза уже на 10—20-й секунде.

Геолого-разведочный институт.
Москва.

Поступило
20 II 1935.

MINÉRALOGIE

RECHERCHES SUR LA PHOSPHORESCENCE DES CALCITES

Par V. LEVŠIN (LEWSCHIN) et M. ALENCEV

(*Présenté par S. I. Wawilow, de l'Académie, le 21. II. 1935*)

Les auteurs ont soumis à un examen détaillé la phosphorescence d'une série de calcites, d'aragonites et de stalactites.

1. On a étudié par la photométrie spectrale la distribution de l'énergie dans les spectres d'émission de ces minéraux pour l'excitation de la luminescence par la raie 365 mμ du mercure. Les spectres se composent de bandes estompées atteignant jusqu'à 150 mμ de largeur, dont les maxima sont donnés à la quatrième colonne du tableau ci-contre (p. 55). La variété des spectres de luminescence prouve que les minéraux examinés, en plus de la composition chimique identique dans tous les cas de la substance fondamentale ($CaCO_3$), comprenaient, en qualité d'activateurs, des admixtions de divers métaux lourds.

2. On a examiné les variations d'intensité de la luminescence dans l'intervalle de températures de 20 à 250°. La bande de phosphorescence fondamentale s'éteint à la hausse de la température dans tous les cas, mais la marche de la décroissance présente son caractère particulier pour chaque minéral. Sur l'un des échantillons (calcites) l'apparition d'une nouvelle bande de luminescence „chaude" se fait remarquer. En 5-me colonne sont données au tableau les valeurs relatives de l'intensité de l'émission lumineuse pour les divers minéraux et aux colonnes 6—10 les variations de l'intensité pour des températures s'élevant de 20 à 240°.

3. On a étudié photométriquement la loi de décroissance de l'émission après cessation de l'excitation. Les mesures ont fait voir que la loi hyperbolique de décroissance

$$I = At^{-\alpha} \qquad (1)$$

(A et α étant des constantes, I l'intensité de la luminescence, t le temps) établie précédemment [1] pour des phosphores de zinc synthétiques, est vérifiée avec une grande exactitude pour des variations d'intensité de l'émission allant au delà du centuple et cela pour tous les minéraux examinés appartenant à la classe des phosphores de calcium. Cette circonstance est d'une importance essentielle, vu qu'à la vérification de la formule (1) d'après les données de Lenard, effectuée par Antonow-Romanowsky et par l'un de nous [1], la marche de la décroissance n'a satisfait à la formule (1) que pour 30% des phosphores de Lenard. Les droites logarithmiques de décroissance sont représentées fig 1 (p. 55). Les valeurs de α se trouvent dans la dernière colonne du tableau.

4. Dans la troisième colonne du tableau le signe шл. dénote une plaque ou lamelle polie du minéral, les chiffres romains I, II indiquent le minéral moulu en grains respectivement de ∾1.5 et de ∾0.5 mm de diamètre, le chiffre III signifie sable fin ou fine poussière. La luminescence des calcites et notamment des aragonites baissait fortement du fait du morcellement du minéral (quelques données y relatives figurent à la cinquième colonne du tableau). En même temps le morcellement fait diminuer le coefficient α, c.-à-d. provoque un ralentissement de la décroissance de la luminescence (analogue à ce qui se produit pour les phosphores de zinc synthétiques).

5. Les valeurs absolues de α étant extrêmement grandes et incomparablement supérieures à celles propres aux phosphores synthétiques correspondants, la décroissance de la luminescence chez les minéraux progresse très rapidement et descend habituellement au-dessous du seuil d'excitation de l'oeil humain dès les premières 10 à 20 secondes d'écoulées.

Institut de Prospection géologique.
Moscou.

Manuscrit reçu
le 20. II. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITTÉRATURE

[1] W. L. Lewschin u. W. W. Antonow-Romanowsky, Sow. Phys., 5, 796, 1934.

БИОХИМИЯ

Ю. ЗАЛЬКИНД, С. ЗОНИС и Н. БЛОХИН

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО СИНТЕЗУ ВИТАМИНА А

(*Представлено академиком А. Н. Бахом 21 II 1935*)

I. О действии магний-бром-винилацетилена на β-ионон*

Присоединение непредельных цепей к ионону представляет тот интерес, что это ведет к соединениям, близким по строению к витамину А или могущим служить исходным материалом для синтеза этого витамина.

В виду того что винилацетилен является теперь сравнительно доступным, представлялось желательным использовать его для конденсации с иононом, тем более, что от него легко перейти к магний-органическому производному, а последнее реагирует с кетонами (1) и со сложными эфирами (2) обычным образом, с образованием третичных спиртов. Правда, при β-иононе реакция могла итти и иначе, так как непредельные кетоны, содержащие конъюгированную систему $CH=CH-\overset{|}{C}=O$, нередко присоединяют магний-органические производные в положении 1,4 (3) с образованием предельных кетонов:

$$-CH=CH-\overset{|}{C}=O + RMgX \rightarrow -\overset{R}{\overset{|}{C}}H-CH=\overset{|}{C}-OMgX \rightarrow$$

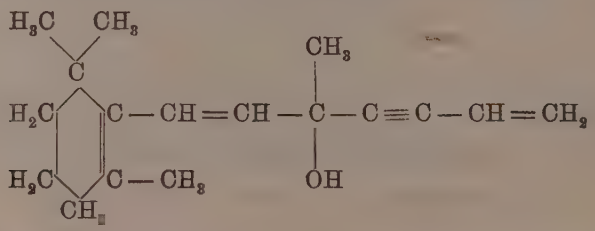
$$\rightarrow -\overset{R}{\overset{|}{C}}H-CH=\overset{|}{C}OH \rightarrow R\overset{|}{C}H-CH_2-CO-$$

* Работа Ю. Залькинда и С. Зониса.

Наши опыты показали, однако, что при действии магниевого производного винилацетилена на β-ионон получается соответствующий третичный спирт, кетона же, повидимому, не образуется. Реакция проведена была в атмосфере азота; запах ионона исчез после двухдневного нагревания на водяной бане. После обычной переработки продукты реакции были перегнаны в вакууме ртутного насоса при 0.1 мм. Небольшое количество (2 г) перешло до 135°, главная же масса перешла при 135—145° (5.5 при 135—140° и 5.5 г при 140—145°). Проба с семикарбазидом на кетон дала отрицательный результат. Продукт представляет вязкую жидкость лимонного цвета с характерным терпенным запахом; на воздухе он легко полимеризуется, а потому мы сохраняли его в запаянных трубках в атмосфере угольного ангидрида. Анализ и определение молекулярного веса указывали на формулу $C_{17}H_{24}O$.

Найдено: C 84.09%, H 10.45%, M 239.5
$C_{17}H_{24}O$. Вычислено: C 83.55%, H 9.91%, M 244.2
$d_{20°} = 0.9818$, $n^D_{20°} = 1.5384$, *MR* найдено 77.79, вычислено 76.63 (экзальтация 1.16).

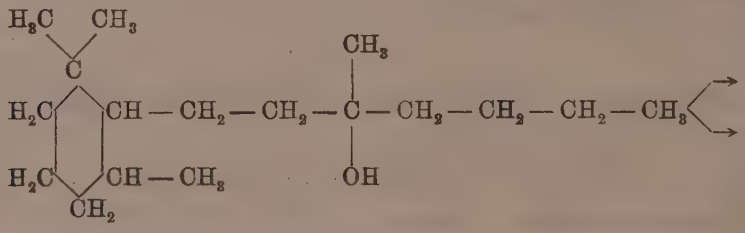
Реакция получения этого тела указывала на формулу 3-метил-1-(триметил 2′, 2′, 6-циклогексенил-1′)-гептадиэн 1,6-ин-4-ол. 3:



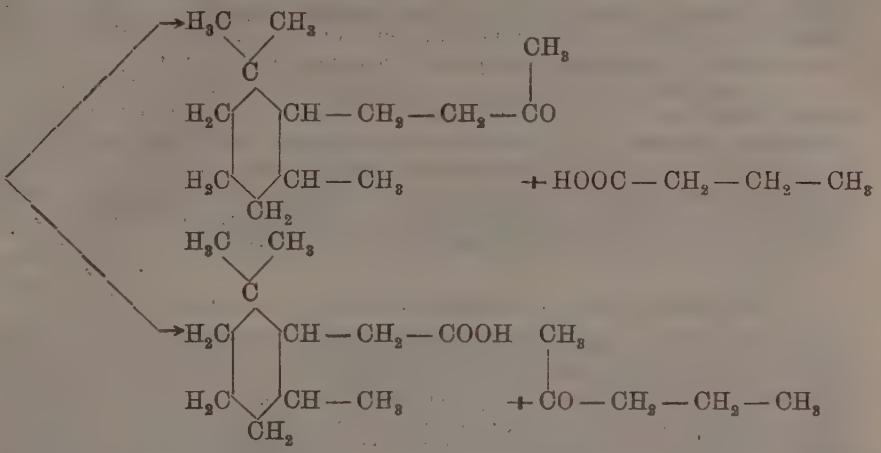
Чтобы доказать его строение, мы прогидрировали это тело водородом в присутствии палладия, осажденного на алюминии. 4.0369 г вещества присоединили 1920 см³ водорода, вместо 1970, отвечающих присоединению 10 атомов водорода. Полученный продукт представлял светложелтую жидкость, в ртутном вакууме (0.1 мм) перегонявшуюся при 125—129°; в обыкновенном вакууме без разложения не перегоняется.

Найдено: C 80.48%, H 13.67%
$C_{17}H_{34}O$. Вычислено: C 80.23%, H 13.48%

Для определения положения гидроксильной группы, этот предельный спирт был окислен хромовой смесью (на 2.5 г спирта 3 г двухромокислого калия, 10 см³ серной кислоты, 60 см² воды). Окисление могло итти по двум направлениям:



3-метил-1-(триметил-2′, 2′, 6′-циклогексил-) гептанол-3



При перегонке продуктов окисления с водяным паром получилось 2 слоя. Верхний, маслянистый, оказался, действительно, тетрагидроиононом. Это было доказано получением тетрагидроионона из β-ионона путем присоединения 4 атомов водорода в присутствии палладия (из 0.12 г $PdCl_2$), осажденного на 2 г алюминия. Перегонка продукта гидрирования в вакууме дала в виде главной фракции жидкость, кипевшую при 8 мм при 112—115°.

$d_4^{\circ} = 0.9363$; $d_4^{20^{\circ}} = 0.9224$; $n_{20^{\circ}}^{D} = 1.4766$

Найдено: $MR = 59.99$, вычислено 60.05.

Семикарбазон полученного вещества после двух кристаллизаций из спирта плавился не очень резко при 165—166.5°. Тетрагидроионон был ранее получен из ионона Рузичка [4] с темп. кип. 128—130° при 14 мм давления, причем семикарбазон имел темп. пл. 183—184°; тетрагидроирон, который по строению является тождественным с тетрагидроиононом, был, однако, получен Рузичка с другими свойствами и дал семикарбазон с темп. пл. 203°. Рузичка приписывает это явление стереоизомерии; возможно, что и различие с полученным нами семикарбазоном обусловливалось тем, что все эти препараты представляют различные смеси стереоизомеров в виду наличия в кетоне 2 асимметрических атомов углерода. Наш семикарбазон был проанализирован.

0.0996 г вещества дали 15 $см^3$ азота (738 мм, 17°)

$C_{14}H_{27}N_3O$. Найдено азота 16.79%, вычислено 16.60%

Продукт, полученный нами при окислении третичного спирта, по всем свойствам походил на тетрагидроионон; семикарбазон его плавился при 163—165°, и при пробе смешения понижения темп. пл. не замечалось.

Экстрагирование водного раствора дало жидкость с характерным запахом масляной кислоты. Анализ серебряных солей полученных кислот обнаружил примесь другой, более высокомолекулярной кислоты, вероятно, триметилциклогексил-уксусной: 0.0497 г соли оставили при прокаливании 0.0249 г серебра (50.1 вместо 55.3% для $C_4H_7O_2Ag$).

Получение тетрагидроионона и масляной кислоты определяет положение гидроксильной группы, а результаты гидрирования — наличность

всех непредельных связей; таким образом строение третичного спирта можно считать установленным. Гидрирование спиртов с ацетиленовой связью обыкновенно не дает перелома в скорости реакции после присоединения первых двух атомов водорода ([5]), что, впрочем, не мешает получать спирты этиленового ряда, если во время прервать реакцию ([6]). Здесь, однако, оказалось, что в присутствии палладия (0.045 г), осажденного на углекислом кальции (1.8 г), растворенный в эфире третичный спирт (1.2 г спирта в 50 см^3 эфира) присоединил первые 2 атома водорода (118 см^3) в 35 мин., после чего реакция сильно замедлилась. Таким образом открывается возможность удобного получения спирта с тремя двойными связями в боковой цепи, который нами ныне и изучается.

II. Биологические свойства продукта синтеза*

Описанный выше синтетический продукт обнаруживает в своем строении ряд черт, весьма приближающих его к витамину А: наличие β-иононового кольца, ненасыщенный характер боковой цепи, спиртовый гидроксил в ней. Мы еще не располагаем в настоящее время исчерпывающими данными относительно того, какие именно химические группировки необходимы для проявления специфической физиологической функции витамина А. Известно лишь, что необходимым является расположение двойной связи в кольце по типу β-ионона (дериваты β-ионона биологически неактивны), далее наличие ненасыщенных связей в боковой цепи (пергидро-витамин А тоже лишен биологического действия). Поэтому представлялось интересным исследовать биологические свойства полученного продукта.

Для опыта были взяты крысы в возрасте 28—30 дней, весом 40—45 г, переведенные на диэту Шермана № 379-а. Метод биологической проверки был избран терапевтический, т. е. определялось исчезновение возникших симптомов А-авитаминоза и предупреждение возобновления их в течение 6 недель. Критерием наступления А-авитаминоза являлись остановка роста и наступление начального заболевания глаз — ксерофтальмия. Крысы были разбиты на 5 групп, по 5 шт. в каждой. Препарат давался в свежем топленом свином сале (смальце). 1-я группа получала дневную дозу в 0.050 мг препарата, 2-я группа 0.015 мг препарата, 3-я группа — контроль — получала смалец без препарата, 4-я группа служила отрицательным контролем, вообще не получала смальца, 5-я группа служила положительным контролем, получала витамин А в виде рыбьего жира.

Испытание дало отрицательный результат. Все крысы первых четырех групп погибли при явлениях почти полного ослепления и общей кахексии. Кривые роста у получавших и не получавших препарата в среднем по группе не давали существенных различий. Эти данные совпадают с такими же отрицательными результатами, полученными Каррером при испытании ряда синтетических продуктов, тоже близких по своему строению к витамину А, но отличавшихся от соединения, описанного в настоящей работе. Необходимо дальнейшее приближение структуры синтетических соединений к строению самого витамина А.

Лаборатория биохимии и физиологии животных.
Академия Наук СССР.
Лаборатория органической химии
Ленинградского химико-технологического института.

Поступило
10 I 1935.

---

* Работа Н. Н. Блохина.

UNTERSUCHUNGEN AUF DEM GEBIETE DER VITAMIN A-SYNTHESE

Von J. SALKIND, S. SONIS und N. BLOCHIN

(*Vorgelegt von A. N. Bach, Mitglied der Akademie, d. 21. II. 1935*)

I. Über die Einwirkung von Magnesiumbromvinylazetylen auf β-Ionon*

Die Addition ungesättigter Ketten an Jonon ist insofern von Interesse, als diese zu Verbindungen führt, die in ihrer Struktur dem Vitamin A nahekommen oder aber als Ausgangsmaterial für eine Synthese dieses Vitamins dienen können.

In Anbetracht dessen, dass Vinylazetylen heute ein verhältnismässig zugängliches Präparat geworden ist, schien es erwünscht, dasselbe für eine Kondensation mit Jonon zu verwerten, umsomehr als es nicht schwer fällt, von Vinylazetylen zu seinen Magnesiumderivat überzugehen, das ja mit den Ketonen (1) und Estern (2) in üblicher Weise, unter Bildung von tertiären Alkoholen, reagiert. Bei β-Jonon kann allerdings die Reaktion auch anders verlaufen, da ungesättigte Ketone, welche das konjugierte System $-CH=$
$=CH-\overset{|}{C}=O$ enthalten, magnesiumorganische Derivate mehrfach in 1, 4-Stellung (3) unter Bildung von gesättigten Ketonen aufnehmen (s. S. 57).

Unsere Versuche zeigten jedoch, dass das Magnesiumderivat des Vinylazetylens einen entsprechenden tertiären Alkohol mit β-Jonon liefert, während eine Ketonbildung allem Anscheine nach ausbleibt. Die Reaktion wurde in einer Atmosphäre von Stickstoff ausgeführt. Der Jonongeruch verschwand nach zweitägigem Erwärmen im Wasserbade. Nach üblicher Behandlung wurden die Reaktionsprodukte im Vakuum einer Quecksilberluftpumpe bei 0.1 mm destilliert. Eine geringe Menge (2 g) ging bei Temperaturen bis 135° über, während die Hauptmasse bei 135—145° überging (5.5 g bei 135—140° und 5.5 g bei 140—145°). Die Semikarbazidprobe auf Keton fiel negativ aus. Das Produkt bildet eine zitronengelbe viskose Flüssigkeit von typischem Terpengeruch. Es polymerisiert sich leicht an der Luft; wir bewahrten es daher in zugeschmolzenen Röhrchen in einer Atmosphäre von Kohlendioxyd auf. Die Analyse, wie auch die Bestimmung des Molekulargewichts, deuteten auf die Formel $C_{17}H_{24}O$ hin.

Ermittelt wurden: C 84.09%, H 10.45%, M 239.5
$C_{17}H_{24}O$. Berechnet: C 83.55%, H 9.91%, M 244.2

$d_{20°} = 0.9818$, $n^{D}_{20°} = 1.5384$; für *MR* wurde ermittelt 77.79, berechnet 76.63 (Exaltation 1.16)

Die Darstellungsreaktion dieses Körpers deutete auf die Formel 3-Methyl-1-(Trimethyl 2′, 2′, 6′-Zyklohexenyl-1′)-Heptadien 1.6-in-4-ol-3 hin (s. S. 58).

Um seine Struktur festzustellen, haben wir diesen Körper mit Wasserstoff in Gegenwart von Palladium, welches auf Aluminium gefällt war, hydriert. 4.0369 g des Stoffes nahmen 1920 cm³ Wasserstoff auf, statt 1970 cm³, die einer Aufnahme von 10 Wasserstoffatomen entsprachen. Das gewonnene Produkt bildete eine hellgelbe Flüssigkeit, die im Quecksilbervakuum (0.1 mm) bei 125—129° überging; im gewöhnlichen Vakuum lässt es sich nicht ohne Zersetzung destillieren

Ermittelt: C 80.48%, H 13.67%
$C_{17}H_{24}O$. Berechnet: C 80.23%, H 13.48%.

* Von J. Salkind und S. Sonis.

Um die Lage der Hydroxylgruppe festzustellen, wurde dieser gesättigte Alkohol mit Chromsäuregemisch (auf 2.5 g Alkohol 3 g Kaliumbichromat, 10 cm³ Schwefelsäure, 60 cm³ Wasser) oxydiert. Die Oxydation konnte nach zwei Richtungen verlaufen (s. S. 58—59).

Bei der Destillation der Oxydationsprodukte mit Wasserdampf bildeten sich zwei Schichten. Die obere ölige Schicht erwies sich in der Tat als Tetrahydrojonon. Dieses liess sich auf Grund der Darstellung von Tetrahydrojonon aus β-Jonon durch Aufnahme von 4 Wasserstoffatomen in Gegenwart von auf 2 g Aluminium gefälltem Palladium (aus 0.12 g $PdCl_2$) nachweisen. Bei Destillation des Hydrierungsproduktes im Vakuum erhielt man als Hauptfraktion eine bei 112—115° siedende Flüssigkeit.

$d_4^{\circ} = 0.9363$; $d_4^{20^{\circ}} = 0.9224$; $n_{20^{\circ}}^{D} = 1.4766$
Gefunden $MR = 59.99$; berechnet 60.05

Das Semikarbazon des gewonnenen Stoffes hatte nach zwei Kristallisationen aus Alkohol einen nicht sehr scharf ausgeprägten Schmelzpunkt von 165—166.5°. Das Tetrahydrojonon mit einer Siedetemperatur von 128—130° bei 14 mm Druck wurde früher von L. Ruzicka [4] aus Jonon dargestellt, wobei das Semikarbazon einen Schmelzpunkt von 183—184° aufwies; das von Ruzicka gewonnene Tetrahydrojonon, welches der Struktur nach dem Tetrahydrojonon identisch ist, hatte jedoch andere Eigenschaften und ergab ein bei 203° schmelzendes Semikarbazon. Ruzicka führt diese Erscheinung auf Stereoisomerie zurück. Möglich, dass der Unterschied von dem durch uns gewonnenen Semikarbazon auch dadurch bedingt ist, dass alle diese Präparate verschiedene Gemische von Stereoisomeren darstellen, da im Keton zwei asymmetrische Kohlenstoffatome vorliegen. Unser Semikarbazon wurde analytisch untersucht, wobei sich folgende Daten ergaben:

0.0996 g des Stoffes lieferten 15 cm³ Stickstoff (738 mm; 17°)
$C_{14}H_{27}N_3O$. Ermittelt wurde Stickstoff 16.79%; berechnet 16.60%

Das Produkt, welches wir bei der Oxydation des tertiären Alkohols erhielten, war in allen seinen Eigenschaften dem Tetrahydrojonon ähnlich; sein Semikarbazon schmolz bei 163—165° und zeigte bei der Mischungsprobe keine Depression des Schmelzpunktes.

Die Extraktion der wässrigen Lösung ergab eine Flüssigkeit mit einem an Buttersäure erinnernden charakteristischen Geruch. Die Silbersalze der gewonnenen Säuren wurden analytisch untersucht, und es stellte sich heraus, dass eine noch höhermolekulare Säure, wahrscheinlich die Trimethylzyklohexylessigsäure, als Beimengung anwesend war: 0.0497 g des Salzes hinterliessen nach dem Glühen 0.0249 g Silber (50.1% statt 55.3% für $C_4H_7O_2Ag$).

Die Bildung von Tetrahydrojonon und Buttersäure bestimmt die Lage der Hydroxylgruppe, die Resultate der Hydrierung dagegen — die Anwesenheit der ungesättigten Bindungen; die Struktur des tertiären Alkohols kann somit als festgestellt gelten. Die Hydrierung von Alkoholen mit Azetylenbindung zeigt nach Aufnahme der ersten zwei Wasserstoffatome [5] gewöhnlich keine scharfe Veränderung der Reaktionsgeschwindigkeit (was übrigens nicht daran hindert, ein Alkohol der Äthylenreihe zu gewinnen, wenn man die Reaktion rechtzeitig unterbricht [6]). Es erwies sich jedoch, dass in Anwesenheit von auf Calciumkarbonat (1.8 g) gefälltem Palladium (0.045 g) der in Äther gelöste tertiäre Alkohol (1.2 g Alkohol in 50 cm³ Äther) die ersten zwei Wasserstoffatome (118 cm³) in 35 Min.

aufgenommen hatte, wonach sich die Reaktion stark verzögerte. Es wird somit ermöglicht, einen Alkohol mit drei Doppelbindungen in der Seitenkette auf bequeme Weise darzustellen, was wir auch gegenwärtig eingehend untersuchen.

II. Die biologischen Eigenschaften des Produkts der Synthese*

Das oben beschriebene synthetische Produkt zeigt in seiner Struktur eine Reihe von Merkmalen, durch welche es dem Vitamin A sehr nahe kommt: das Vorhandensein eines β-Jononringes, der ungesättigte Charakter der Seitenkette, die alkoholische Hydroxylgruppe in derselben. Gegenwärtig verfügen wir noch über keine erschöpfenden Daten bezüglich der chemischen Gruppierungen, die erforderlich sind, um die spezifischen physiologischen Funktionen des Vitamins A zu entfalten. Bekannt ist nur, dass hierfür erforderlich sind eine Anordnung der Doppelbindung im Ring nach dem Typus von β-Jonon (die Derivate des α-Jonons sind biologisch inaktiv) und ferner das Vorhandensein ungesättigter Bindungen in der Seitenkette (das Perhydrovitamin-A ist ebenfalls biologisch inaktiv). Es war daher von Interesse, die biologischen Eigenschaften des gewonnenen Produktes zu untersuchen. Zu dem Versuch wurden Ratten im Alter von 28—30 Tagen verwendet, welche 40—45 g wogen, und mit der Sherman'schen Diät № 379-a gefüttert wurden. Als biologische Kontrolle wurde die therapeutische Methode gewählt, d. h. es wurde das Verschwinden der eingetretenen Symptome der A-Avitaminose bestimmt und einer Wiederholung derselben im Verlaufe von 6 Wochen vorgebeugt. Als Kriterium für das Eintreten einer A-Avitaminose diente ein Stillstand des Wachstums und das Auftreten einer beginnenden Xerophthalmie. Die Ratten wurden in fünf Gruppen zu je fünf Stück verteilt. Das Präparat wurde in frischgeschmolzenem Schweineschmalz verabfolgt. Die erste Gruppe erhielt täglich 0.050 mg des Präparats, die zweite Gruppe 0.015 mg des Präparats, die dritte Gruppe (Kontrollgruppe) bekam das Schmalz ohne Präparat, die vierte diente als negative Kontrolle und bekam überhaupt kein Schmalz, die fünfte Gruppe diente als positive Kontrolle und erhielt das Vitamin A in Form von Lebertran. Die Resultate der Prüfung fielen negativ aus. Die Ratten der ersten vier Gruppen gingen sämtlich ein unter fast völliger Erblindung und allgemeiner Kachexie. Die durchschnittlichen Wachstumskurven wiesen bei allen Gruppen keine wesentlichen Unterschiede auf, einerlei ob sie das Präparat bekommen hatten oder nicht. Diese Daten stimmen mit den gleichen negativen Resultaten überein, welche Karrer bei der Prüfung einer Reihe von synthetisch dargestellten Produkten erhielt, die ihrer Struktur nach ebenfalls dem Vitamin A nahe kommen, sich aber von der in vorliegender Arbeit beschriebenen unterscheiden. Eine weiter strukturelle Annäherung der synthetischen Verbindungen an Vitamin A ist erforderlich.

Laboratorium für Biochemie und Physiologie der Tiere,
Akademie der Wissenschaften der UdSSR.
Laboratorium für organische Chemie, Leningrader
chemisch-technologisches Institut.

Eingegangen
d. 10. I. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] W. Carothers, Journ. Amer. Ch. Soc., **55**, 1094 (1933). [2] Ю. Залькинд и В. Плец, Труды ЛХТИ, вып. 1 (1934); ЖОХ, **4** (1088) 1934. [3] Kohler, Journ. Am. Ch. Soc., **37**, 369 (1907). [4] L. Ruzicka, Helv. Chim. Acta, 2, 389. [5] Ю. Залькинд, ЖРФХО, **47**, 2045 (1915). [6] Ю. Залькинд, ЖРФХО, **50**, 23 (1918).

* Von N. Blochin.

ЭМБРИОЛОГИЯ

З. С. КАЦНЕЛЬСОН

ОБ ИСТОЧНИКАХ РАЗВИТИЯ ЛАТЕРАЛЬНО-ВЕНТРАЛЬНОЙ ЧАСТИ МЫШЦ ТУЛОВИЩА И МУСКУЛАТУРЫ ХВОСТА У АМФИБИЙ

(*Представлено академиком А. А. Рихтером 20 I 1935*)

В предыдущих работах [1, 2] мною было показано, что миотомы нельзя рассматривать как единственный источник развития поперечно-полосатых мышц у земноводных. Мои наблюдения подтвердили указания ряда авторов о возможности развития поперечно-полосатой мускулатуры путем локальной дифференцировки мезенхимных элементов. Мезенхимный гистогенез мышц Льюис [3] констатировал, изучая развитие руки человеческого эмбриона, Васюточкин [9] — зобной железы у курицы, Шмидт [7, 8] исследовал мезенхимный миогенез в языке и конечностях у различных млекопитающих.* У хвостатых амфибий мезенхимная закладка поперечно-полосатых мышц мною была установлена для мышц конечностей, жабр, вентральной стенки живота и некоторых мышц головного отдела.

Приступив к переисследованию развития миотомной мускулатуры (туловищных и хвостовых мышц), необходимость чего была мною показана в упомянутых работах, я констатировал, что мезенхима и здесь принимает известное участие в гистогенетических процессах. Это участие не ограничивается, как это обычно принимают, тем, что за счет мезенхимы происходят элементы эндомизиума; мои наблюдения показывают, что к миотомным зачаткам присоединяются мезенхимные элементы, дифференцирующиеся в направлении образования поперечно-полосатых мышечных волокон.

Объектом исследования как и прежде служили личинки так наз. уральской саламандры (*Salamandrella keyserlingi* Dyb.) и аксолотля.

В отношении мышц туловища мои наблюдения приводят к следующему заключению. Дорзальная и дорзо-латеральная часть туловищной мускулатуры развивается целиком из миотомов. От последних между эктодермой и производными мезодермы проникает так наз. вентральный миотомный отросток, описанный Маурером [4, 5]. По его мнению, за счет этого отростка и развивается вся латеральная и вентральная часть брюшных мышц. Уже ранее я упоминал, что вентральная часть брюшных мышц развивается за счет мезенхимы. Мои новые наблюдения показывают, что при изучении сагиттальных и косых срезов можно видеть присоединение типичных мезенхимных элементов к миотомным зачаткам. Повидимому, миотомный вентральный отросток дает лишь основу для закладки брюшных (латерально-вентральных) мышц, в дальнейшем миогенез идет за счет мезенхимы. В типичном мезенхимном синцитии удается обнаружить поперечно-полосатые миофибриллы и формирование первичных мышечных волокон. Я ни разу не видел дифференцировки миофибрилл в изолированных мезенхимных клетках [что при гистогенезе миодных элементов зобной железы наблюдал А. М. Васюточкин [9]]; всегда из рыхлой мезенхимной сети образуется симпласт, протоплазма которого приобретает эктоплазматический [в смысле Студничка [6]] характер, и после этого

* Подробнее см. обзор литературы [2].

в такой симпластической* мезенхимной закладке начинается дифференцировка миофибрилл. У 26—32-дневных личинок между элементами ряда: мезенхимные клетки — мезенхимный синцитий — мезенхимный симпласт с возникающими поперечно-исчерченными миофибриллами удается установить гамму совершенно не чувствительных переходов. Возникшие на основе мезенхимы примитивные поперечно-полосатые волокна ничем не отличаются от волокон миотомного происхождения.

В хвосте после окончательной дифференцировки сомитов развитие мускулатуры также идет за счет мезенхимы. У личинок в конце второй и начале третьей недели развития можно видеть всю серию переходов от мезенхимных элементов к сформированным мышечным сегментам. Каудальные сегменты состоят из скоплений мезенхимных клеток, сливающихся в симпласт и располагающихся в определенных местах под эпидермисом. В крайних каудальных сегментах, закладывающихся подобным образом, мы еще не встречаем миофибрилл. Идя в краниальном направлении, мы наблюдаем сегменты с одиночными миофибриллами, затем с образующимися первичными мышечными волокнами и, наконец, сформированные сегменты, состоящие из пучков поперечно-полосатых мышц.

На основании своих исследований полагаю возможным сделать следующие предварительные выводы:

1. В развитии туловищных и хвостовых мышц у амфибий принимают участие мезенхимные элементы.

2. Миотомный вентральный отросток дает лишь основу для закладки брюшной мускулатуры, к которой присоединяются слои мышц, образующиеся за счет прилегающих к этой закладке участков мезенхимного синцития.

3. За счет мезенхимы образуется вентральная и вентрально-латеральная часть туловищной мускулатуры и мышечные сегменты хвоста.

Гистологическая лаборатория
I Ленинградского медицинского института.

Поступило
20 I 1935.

EMBRYOLOGIE

ÜBER DIE ENTWICKLUNGSQUELLEN DES LATERO-VENTRALEN TEILES DER RUMPFMUSKELN SOWIE DER KAUDALEN MUSKULATUR BEI AMPHIBIEN

Von Z. S. KATZNELSON

(*Vorgelegt von A. A. Richter, Mitglied der Akademie, d. 20 I. 1935*)

In den vorigen Arbeiten ([1, 2]) wurde von mir der Nachweis erbracht, dass bei den Amphibien die Myotome nicht die einzige Quelle der Entwicklung der quergestreiften Muskeln sind. Meine Beobachtungen haben die Befunde einer Reihe von Verfassern bezüglich der Möglichkeit der Entwicklung der quergestreiften Muskulatur durch lokale Differenzierung der Mesenchymelemente bestätigt. Lewis ([3]) konstatierte die mesenchymale Histogenese der Muskeln im Laufe einer Erforschung der Entwicklung des Armes des menschlichen Embryo, Vasjutočkin ([9]) — indem er die Thymusdrüse des Huhnes untersuchte. Schmidt ([7, 8]) erforschte die

* Синцитиальной — по терминологии Студничка.

mesenchymale Myogenese in der Zunge und den Gliedmassen verschiedener Säuger.* Ich habe an Urodelen eine mesenchymale Anlage der quergestreiften Muskeln für die Muskeln der Gliedmassen, der Kiemen, der ventralen Wand des Abdomens und für einige Kranialmuskeln festgestellt.

Indem ich eine Neuuntersuchung der Myotomalmuskulatur (der Rumpf- und Kaudalmuskeln) unternahm (für deren Notwendigkeit ich in den erwähnten Abhandlungen den Nachweis erbracht habe) konstatierte ich, dass auch hier das Mesenchym in gewissem Masse an den histogenetischen Prozessen mitbeteiligt ist. Diese Mitbeteiligung besteht nicht allein darin, dass, wie dieses gewöhnlicherweise angenommen wird, auf Kosten des Mesenchyms Elemente des Endomysiums entstehen; meine Beobachtungen zeigen dass zu den Myotomanlagen Mesenchymelemente sich hinzugesellen die im Sinne der Ausbildung von quergestreiften Muskelfasern sich differenzieren.

Als Untersuchungsobjekt dienten mir, wie früher, Larven der sogen. Ural Salamander (*Salamandrella keyserlingi* Dyb.) und des Axolotles.

In Betreff der Rumpfmuskulatur ergibt sich aus meinen Beobachtugen Folgendes. Der dorsale und dorso-laterale Teil der Rumpfmuskulatur entsteht gänzlich aus Myotomen. Von den letzteren entspringt zwischen Ektoderm und den Derivaten des Mesoderms der sogen. von Maurer beschriebene ([4, 5]) Myotomfortsatz. Wobei der genannte Verfasser meint, dass der gesamte laterale wie ventrale Teil der Abdominalmuskeln eben auf Kosten dieses Fortsatzes sich entwickelt. Es ist bereits früher von mir erwähnt worden, dass der ventrale Teil der Abdominalmuskeln auf Kosten des Mesenchyms entsteht.

Meine neuen Beobachtungen zeigen, dass beim Studieren der Sagittal- und Querschnitte ein Anschluss typischer Mesenchymelemente an die Myotomanlagen zu sehen ist. Der myotomale Ventralfortsatz bilden wohl nur die Basis für die Anlage der abdominalen ventralen (latero-ventralen) Muskeln, während im weiteren die Myogenese auf Kosten des Mesenchyms vor sich geht. Im typischen Mesenchymsyncytium gelingt es, quergestreifte Myofibrillen und Bildung von primären Muskelfasern aufzudecken. Ich habe niemals eine Differenzierung von Myofibrillen in isolierten Mesenchymzellen zu sehen bekommen [wogegen A. Vasjutočkin ([9]) dieses in der Histogenese der myoiden Elemente der Thymusdrüse beobachtete]; aus dem losen Mesenchymretikulum entsteht immer ein Symplast, dessen Protoplasma einen ektoplasmatischen Charakter [im Sinne Studnička's ([6])] erlangt; daraufhin beginnt in einer derartigen symplastischen** mesenchymalen Anlage die Differenzierung der Myofibrillen. Bei 26—32 Tage alten Larven lässt sich zwischen Elementen der Reihe: Mesenchymzellen — Mesenchymsyncytium — Mesenchymsymplast mit in Bildung begriffenen quergestreiften Myofibrillen, eine Stufenleiter gänzlich unmerklicher Übergänge aufstellen. Die auf der Grundlage des Mesenchyms entstandenen quergestreiften Fasern sind in nichts von den Fasern myotomaler Herkunft unterschieden.

Auch im Schwanze geht nach Abschluss der Differenzierung der Somiten die Entwicklung der Muskulatur ebenfalls aus dem Mesenchym einher. Am Ende der zweiten und am Anfang der dritten Woche der Entwicklung lässt sich bei den Larven die volle Serie der Übergänge von den Mesenchymelementen an bis zu ausgebildeten Muskelsegmenten beobachten.

* Näheres darüber siehe in meiner Schrifttumübersicht ([2]).
** Syncytialen laut der Terminologie von Studnička.

Die Kaudalsegmente bestehen aus Ansammlungen von Mesenchymzellen, die zu einem Symplast zusammenfliessen und an bestimmten Stellen unter der Epidermis zu liegen kommen. In den extremen Kaudalsegmenten, die auf diese Weise angelegt werden, finden wir noch keine Myofibrillen vor. Kranialwärts bekommen wir Segmente mit einzelnen Myofibrillen, dann solche mit in Bildung begriffenen primären Muskelfasern und schliesslich ausgebildete aus quergestreiften Muskelbündeln bestehende Segmente zu sehen.

An der Hand meiner Befunde halte ich es für möglich, folgende preliminäre Schlüsse zu ziehen:

1. An der Entwicklung der Rumpf- und Kaudalmuskeln sind bei Amphibien Mesenchymelemente mitbeteiligt.

2. Der myotomale ventrale Fortsatz ergibt nur die Basis für die Anlage der Abdominalmuskulatur, zu der sich noch Muskelschichten hinzugesellen, die auf Kosten der anschliessenden Gebiete des Mesenchymsyncytiums gebildet werden.

3. Auf Kosten des Mesenchyms werden der ventrale und ventro-laterale Teil der Rumpfmuskulatur, sowie die Muskelsegmente des Schwanzes gebildet.

Histologisches Laboratorium
des 1-ten leningrader medizinischen
Instituts.

Eingegangen
d. 20. I. 1935

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

1. З. С. Кацнельсон, ДАН, II, 1934, 188. Z. S. Katznelson, C. R. Acad. Sci. URSS, II, 1934. 191. 2 Z. S. Katznelson, Anat. Record. 61, № 3, 1934. 3 W. H. Lewis, Amer. J. of Anat., 1, 1902. 4 F. Maurer, Hertwig's Handbuch, Bd. 3, T. 1, 1906. 5 F. Maurer. Grundzüge d. vergl. Gewebelehre, 1915. 6 F. K. Studnička, Biol. Reviews, 9, 1934. 7 Viktor Schmidt. ZS. f. mikr.-anat. Forsch., 8, 1927. 8 Viktor Schmidt, ZS. f. mikr.-anat. Forsch., 20, 1930. 9 А. М. Васюточкин, Тр. Спб. о-ва естеств., 44, 1913. A. Vasjutočkin, Trav. de la Soc. des Natur. St. Petersb., 44, 1913.

ГЕНЕТИКА

В. В. ДОНЧЕНКО и Н. Н. МЕДВЕДЕВ

СЛУЧАЙ ЗАВИСИМОСТИ УСПЕХА МЕЖВИДОВОЙ ГИБРИДИЗАЦИИ ОТ ОДНОГО ЕДИНСТВЕННОГО ГЕНА

(Представлено академиком ВУАН А. А. Сапегиным 13 I 1935)

Проблема

При скрещивании *Dr. melanogaster* Lobe^2 ♀♀ × *Dr. simulans* ♂♂ с целью исследования фенотипического проявления гена Lobe^2 у видовых гибридов, одним из авторов (Н. Н. Медведев) было подмечено относительно редкое появление гибридов по сравнению с теми случаями, когда скрещиваемые виды имели иное генетическое строение ([1,2]).

Поэтому представлялось интересным выяснить на бо́льшем материале, действительно ли ген Lobe^2 *Dr. melanogaster* снижает процент развивающихся гибридов в обоих реципрокных скрещиваниях? Другими словами — имеются ли какие-либо основания полагать, что частичный успех или неудача видовых скрещиваний в отдельных случаях могут зависеть от физиологического влияния единственного менделевского гена?

Материал и методы

С этой целью были выполнены следующие скрещивания:

I. *Dr. mel.* $\widehat{yy}$ ♀♀ × *Dr. sim.* ♂♂
II. *Dr. mel.* $\widehat{yy\ L^2/+}$ ♀♀ × *Dr. sim.* ♂♂ *
III. *Dr. sim.* $\widehat{ywyw}$ ♀♀ × *Dr. mel.* ♂♂
IV. *Dr. sim.* $\widehat{ywyw}$ ♀♀ × *Dr. mel.* $L^2/+$ ♂♂

Скрещивания I и II, с одной стороны, и III и IV — с другой, отличались между собою только в отношении наличия или отсутствия гена Lobe², привносимого в скрещивание со стороны *Dr. melanogaster*. Фенотипическое проявление рассматриваемого гена выражается в сильном уменьшении величины глаз, а иногда и в полной их редукции. Ген доминантный и летальный в гомозиготном состоянии. Локус II, 72.0.

Для каждого скрещивания было взято по 1000 самок и 2000 самцов, каковые были распределены поровну в 20 массовых культурах, содержащих каждая 50 самок и 100 самцов. Виргинные самки выдерживались в течение трех дней, после чего поступали в скрещивание.

Поставленные культуры через каждые два дня перегонялись в свежие бутылки. Пять таких пересадок было проведено по каждому скрещиванию.

Учет вылетевших imagines (в течение шести дней с начала лёта) производился во всех бутылках — суммарно по каждому скрещиванию.

Полученные результаты и выводы

Во всех скрещиваниях было получено в общей сложности 1905 гибридов. Распределение их по отдельным скрещиваниям видно из нижеследующей таблицы.

Как видно из этих данных, в скрещивании *Dr. mel. yy*♀♀ × *Dr. sim.* ♂♂ было получено 815 гибридных самцов. Напротив, от такого же числа *Dr. mel. yy* самок, но гетерозиготных по гену Lobe², было зарегистрировано только 421 гибрид. Таким образом, влияние гена Lobe², входящего в скрещивание по материнской линии, выражается в снижении процента возникающих гибридов ровно вдвое.

Скрещивания III и IV дали иные результаты. Общее количество полученных здесь гибридов (669) вдвое меньше по сравнению с предыдущими скрещиваниями (1236). Это понижение находится в связи с общей пониженной плодовитостью и жизнеспособностью самок *simulans* по сравнению с самками *melanogaster*.

Что же касается непосредственно влияния рассматриваемого гена, то как в случае отсутствия гена Lobe² у самцов *melanogaster*, так и при его наличии, количества полученных гибридов в обоих случаях одинаковы и соответственно равны 331 и 338 на 1000 самок в каждом скрещивании. Иначе говоря, ген Lobe², присутствуя у самцов *melanogaster*, не оказывает никакого влияния на процент возникающих гибридов.

Только что отмеченное влияние гена Lobe² по материнской линии может быть объяснено или пониженной половой активностью Lobe² самок (физиологическая изоляция), или же оно не зависит от этой последней и является каким-либо образом связанным с внутренней структурой продуцируемых Lobe² самками яиц. Так как количества развивающихся при

* Линия $\widehat{ywyw}$ у *Dr. simulans* недавно получена в нашем Институте К. В. Косиковым, за предоставление которой для настоящего исследования авторы выражают ему свою благодарность.

Характер скрещивания Character of crossings	Получено гибридов на 1000 ♀♀ Number of hybrids arisen per 1000 ♀♀							Число гибридов в реципрокных скрещиваниях Number of hybrids in reciprocal crossings			
	Всего Total	♀♀	♂♂	He-L^2 Non-L^2	L^2	%		Всего Total	%	Diff $\pm m$ diff	Diff m diff
						He-L Non-L	L^2				
I. *Dr. mel.* $\widehat{yy}$ ♀♀ × *Dr. sim.* ♂♂	815	—	815	815	—	100	—	1236	65.94±1.35	31.88±1.91	16.69
II. *Dr. mel.* $\widehat{yy}$ $L^2/+$ ♀♀ × *Dr. sim.* ♂♂	421	—	421	233	188	55.35±2.42	44.66±2.42		34.06±1.35		
III. *Dr. sim.* $\widehat{ywyw}$ ♀♀ × *Dr. mel.* ♂♂	331	331	—	331	—	100	—	669	49.48±1.93	1.04±2.73	0.38
IV. *Dr. sim.* $\widehat{ywyw}$ ♀♀ × *Dr. mel.* $L^2/+$ ♂♂	338	338	—	190	148	56.04±2.70	43.96±2.70		50.52±1.93		
Всего в скрещиваниях без L^2 Total in crossings without L^2 (I + III)	1146	331	815	1146	—	100	—	1905	60.16±1.12	20.32±1.58	12.86
Всего в скрещиваниях с L^2 Total in crossings with L^2 (II + IV)	759	338	421	423	336	55.73±1.80	44.27±1.80		39.84±1.12		

этом Lobe^2 и не-Lobe^2 гибридных самцов приблизительно одинаковы (44.66 и 55.34%), то в случае второго альтернативного объяснения приходится сделать еще одно допущение, а именно, что отмирание гибридных яиц происходит независимо от наличия или отсутствия у них хромозомы Lobe^2 и каким-то образом выражается в общем понижении их метаболизма и развития. Проверке этих предположений, а также разработке этого вопроса на большем материале, будет посвящено дальнейшее исследование.

В заключение следует отметить, что ген Lobe^2 является доминирующим у гибридов в той же мере, как и у чистой *melanogaster*. Указание Моргана о том, что ген Lobe является рецессивным у гибридов *simulans* × × *melanogaster*, вероятно, объясняется тем, что он имел дело с другим, более слабым аллеломорфом серии Lobe.

Институт генетики.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
18 I 1935.

GENETICS

A CASE OF DEPENDENCE OF SUCCESS OF INTERSPECIFIC HYBRIDIZATION UPON A SINGLE GENE

By V. V. DONČENKO and N. N. MEDVEDEV

(*Communicated by A. A. Sapehin, Member of the Ukrainian Academy, 13. I. 1935*)

SUMMARY

1. In making some crossings of *Dr. melanogaster* females of different constitution by *Dr. simulans* males, it was accidentally noticed that the number of hybrid offspring yielded were different in different cases. The question arose, whether the particular mutants of *melanogaster* in these crossings were responsible for these relations. In other words, is there any reason to believe that the partial success or failure in species hybridization may, at any rate in some cases, depend upon the physiological or any other influence of a single Mendelian gene?

2. With this purpose in mind we carried out some reciprocal crossings that differed from each other only in respect of Lobe^2 gene in *melanogaster* parents.

3. The results obtained (see the table, p. 69) clearly show that the number of hybrid offspring in the case of $\widehat{yy}$ *melanogaster* by *simulans* males (815) is nearly twice as great as in the case when $\widehat{yy}$ *melanogaster* females were heterozygous for Lobe^2 gene (421).

4. On the other hand, the gene in question showed no influence when introduced into the crossing from the male parents (331 and 338 respectively).

5. The possible explanations of this matroclinous reducing influence are given.

6. Lobe^2 gene is as strongly dominant in hybrids *melanogaster* by *simulans* as in the pure *melanogaster*.

Institute of Genetics,
Academy of Sciences of the USSR.
Moscow.

Received
18. I. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

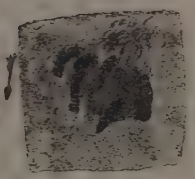
[1] М. Бельговский, ДАН, т. IV, № 1—2, 108—112, 1934. M. Belgovskij, C. R. Acad. Sci. URSS, v. IV, № 1—2, 108—112, 1934. [2] J. Kerkis, Journ. Exp. Zool., v. 66, 477—509, 1933. [3] T. H. Morgan, Carnegie Institution of Washington Publication № 399, 201—222, 1929. [4] A. H. Sturtevant, Genetics, 5, 488—500, 1920.

ДОНЧО КОСТОВ

ИЗМЕНЕНИЕ КАРИОТИПОВ ЦЕНТРИФУГИРОВАНИЕМ

(*Представлено академиком Н. И. Вавиловым 5 II 1935*)

Работы Блексли ([1, 2]), Левитского ([7]), Навашина ([8]) и т. д. показывают, что новые кариотипы в растениях могут быть получены воздействием Х-лучей или радия. Эти агенты разламывают хромозомы в различных местах. Разлом в точке прикрепления нити веретена может произойти редко или почти с такой же частотой как в любом другом месте в зависимости от хромозомы. Это дает, конечно, материал для определенных типов генетических исследований, но для получения новых кариотипов, как напр. у *Datura* (с 26 хромозомами), разламывания в перетяжке хро-



Фиг. 1. — Fig. 1.

Фиг. 2. — Fig. 2.

Фиг. 3. — Fig. 3.

мозомы, повидимому, представляют лучший материал, потому что фрагменты с нитями веретена могут вести себя в течение митоза более или менее как индивидуальные хромозомы. К сожалению мы не обладаем методом, вызывающим фрагментацию хромозом в месте прикрепления нити веретена. Микродиссекции, обыкновенно, настолько грубы, что очень сильно повреждают клетку, и последняя погибает без дальнейшего деления.

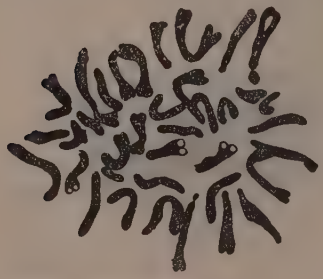
Центрифугирование является методом, которым может быть осуществлено механическое перемещение клеточного вещества согласно весу его составных частей и в то же время может быть нарушено нормальное течение митоза и мейозиса. Центрифугированием пророщенных семян различных покрытосеменных (*Vicia*, *Triticum* и *Nicotiana*) мы добились различных ненормальностей в митозе и даже разлома хромозом. В течение ранней анафазы концы хромозом направлены к полюсам, в то время как место прикрепления нити веретена направлено к экватору. В корешках пророщенных центрифугированных семян (корни которых были направлены центрипетально в течение центрифугирования) в течение ранней анафазы в некоторых клетках все концы хромозом могут быть повернуты центробежно (фиг. 1 и 2).

Веретено в метафазе и в ранней анафазе может быть сплющено к экватору так, что его ось может быть сокращена до $^1/_3$ нормальной. Подобные картины мы также наблюдали раньше ([3]) в исследованиях вязкости цитоплазмы делящихся клеток. Вследствие такой сплющенности веретена изменился нормальный ход митотических процессов или, так сказать, они парализовались так, что расхождения хромозом обычно

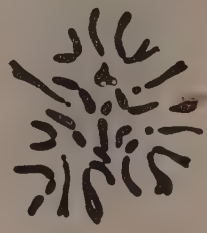
не происходит. Это явление ведет к удвоению хромозом в соматических клетках. Подобные слабые механические нарушения клеток, вызванные центрифугированием, увеличивают вязкость цитоплазмы, которая может быть частично является причиной удвоения хромозом. Иногда встречаются хромозомальные аберрации, которые, возможно, возникают вследствие чрезмерного расхождения хромозом к полюсам в течение митоза.

Фрагментация хромозом и транслокация являются наиболее интересным следствием центрифугирования. Нам кажется, насколько показывают исследования, что разламывание хромозом бывают на любом месте на протяжении хромозом, но повидимому разламывание все таки чаще всего происходит в точке прикрепления нити веретена. Такой разлом имеет важное значение, давая материал для цитологических исследований в связи с проблемой формообразования и эволюции.

Множество фрагментов сохраняют свою индивидуальность в течение тысячи делений клетки возможно потому, что они имеют на конце прикрепленную нить веретена.



Фиг. 4. — Fig. 4.



Фиг. 5. — Fig. 5.

Фиг. 6. — Fig. 6.

Такие фрагменты были обнаружены нами в корешках растений *N. Langsdorffii*, полученных из пророщенных центрифугированных семян. В них же имелись различные ненормальности. Корешки брались с растений в 10—15 см (спустя около 40 дней после центрифугирования). *N. Langsdorffii* имеет 18 соматических хромозом. В корешках центрифугированных растений мы нашли пластинки метафазы с 18, 17, 19, 20, 21, 22, 25, 27, 36 и 38 хромозомами (фиг. 4—6). Указанные числа включают как хромозомы, так и фрагменты. Число 36 есть удвоенное число хромозом *N. Langsdorffii*, а 38 удвоение, сопровождаемое фрагментацией. Возникает принципиальный вопрос: какова жизнеспособность и насколько высока частота деления клетки с фрагментами и с измененной хромозомальной конституцией в сравнении с нормальной клеткой? Вопрос этот принципиален, потому что, если клетки с новой хромозомальной конституцией не жизнеспособны или жизнеспособны, но с более слабой частотой клеточного деления, чем у нормальной клетки, то они могут быть очень легко вытеснены нормальными клетками и могут исчезнуть в самом начале развития всходов, так что в дальнейшем образуются только нормальные побеги и корешки. Корешки, представляющие хромозомальные химеры, являются очень удобными объектами для изучения этого вопроса. При исследовании таких корешков мы обнаруживаем:

1) У центрифугированной при определенных условиях времени и быстроты *Vicia Faba*, в корешках имеются тетраплоидные клетки с очень

низкой частотой деления и нормальные диплоидные клетки, постепенно вытесняющие тетраплоидные, в результате чего в точке роста корешка остаются только диплоидные клетки. Таким образом тетраплоидные клетки элиминируются на очень ранней стадии развития.

2) В корешках центрифугированного *N. Langsdorffii* мы нашли химеры с участками $2n$ и $4n$. В данном случае тетраплоидные клетки, повидимому, имеют, приблизительно, частоту клеточного деления нормальных клеток. Диплоидный участок этой химеры постепенно уменьшается по направлению к концу корешка, в счет чего тетраплоидный участок увеличивается так сильно, что он занимает весь кончик корешка. Это указывает на то, что в некоторых случаях центрифугированием можно получить тетраплоидные корешки и может быть и побеги.

3) Клетки с фрагментами, экстрахромозомами или и с экстрахромозомами и с фрагментами могут также иметь ту же частоту клеточного деления, что и у нормальной клетки, потому что самая верхушка химерных корешков часто занята клетками с измененной хромозомальной конституцией.

Приведенные данные показывают достаточно ясно, что „мутации" Штубе ([9]), полученные центрифугированием вместе с химикалиями, являются хромозомальными аберрантами, а не генными мутациями, как мы это считали уже несколько лет назад ([4]). Более детально об этих исследованиях будет сообщено позднее.

Мы глубоко обязаны академикам Н. И. Вавилову, А. А. Рихтеру и В. Н. Любименко за создание соответствующей обстановки, благодаря чему удалось провести эту работу. Выражаем свою глубокую благодарность акад. Д. С. Рождественскому за полезные советы и лаборанткам А. Д. Тихоновой и М. А. Догадкиной за их помощь в течение наших исследований.

Институт генетики,
Академия Наук СССР,
Москва.

Поступило
1 II 1935.

GENETICS

CHANGES IN KARYOTYPES INDUCED BY CENTRIFUGING

By DONTCHO KOSTOFF

(Communicated by N. I. Vavilov, Member of the Academy, 5. II. 1935)

The works of Blakeslee ([1,2]), Lewitzky ([7]), Navashin ([8]), and others, have shown that new caryotypes can be produced in plants by X-rays or radium irradiation. These agents break the chromosomes at various places. The breakage occurs at the point of the spindle fibre attachment either rarely or with approximately the same frequency as at any other place, depending on the chromosome involved. Breakage at this point is desirable, of course, in preparing material for certain types of genetic investigations, but for producing new caryotypes, such as those in *Datura* (with 26 chromosomes), breakage at the chromosome constriction seems to offer better material to start with, because fragments with the spindle fibre attachment behave more or less like individual chromosomes during mitosis. Unfortunately, we do not know any way to induce chromosome fragmentation at the point of the spindle attachment. Microdissections are usually so crude that they seriously injure the cell and it dies without further division.

Centrifuging is a method of bringing about mechanical rearrangements of the cell substances (according to the relative weight of the substances) accompanied by disturbances in the normal mitotic and meiotic processes. The chromomeres of a chromosome should not necessarily have the same relative weight, on the contrary, it is more probable that they have different relative weight, or at least some of them may have. If we assume that a chromosome consists of chromomeres: *a—b—c—d—e—f* — (chromosome constriction)—*g—h.... p—q—r*, and if the chromomeres *a—b—c* — have greater relative weight (or smaller) than the other part of the chromosome (the other chromomeres) a breakage should occur between the chromomeres *c* and *d*. Similarly, regions from the middle of the chromosomes can be thrown out by centrifuging. But in the cases when the chromomeres of the one side of the spindle fibre attachment have greater relative weight than those of the other one and the attachment between the chromomeres is much better than at the chromosome constriction, the breakage should occur at the spindle fibre attachment. By centrifuging germinated seeds of various Angiosperms (*Vicia*, *Nicotiana* and *Triticum*) we succeeded in inducing various abnormalities in mitosis and even breakage of the chromosome translocations and chromosome doubling.

These phenomena seem to occur during the mitosis, but it is very probable that some of them, if not all of them, may occur during the resting stage of the nucleus too.

During the eary anaphase the free ends of the chromosomes are directed toward the poles, and the spindle fibre attachments toward the equator. By centrifuging germinated seeds (the roots of which were centripetally directed during the centrifuging) all the ends of the chromosomes can be turned centrifugally in some cells during the early anaphase (Fig. 1 and 2). Metaphasal as well as early anaphasal spindles can be flattened equatorially, so that their axis is often reduced to one third of the normal. We had already observed similar phenomena in studying the cytoplasmic viscosity of dividing cell ([3]). As a consequence of such a flattening of the spindles, the normal mitotic processes are altered or, so to say, paralysed, so that occasionally chromosome separation does not take place. Such a phenomenon results in a doubling of the chromosome number in the somatic cells (Fig. 4). Sometimes chromosomal aberrations occur (Fig. 5 and 6), due probably to unequal distribution of the chromosomes to the poles during the mitosis. The chromosome fragmentation, however, constitutes one of the most interesting consequences of centrifuging (Fig. 4—6). As far as our investigations show, the breakage of the chromosomes seems to occur at any place, but most frequently, at the point of the spindle fibre attachment. Such breakage is of great importance in producing suitable material for cytogenetical investigations in connexion with the problem of the origin of the species. Many of the fragments preserve their individuality during thousands of cell divisions, probably, because they have at one end the spindle fibre attachment.

From the centrifuged germinating seeds of *Nicotiana Langsdorffii* we raised plants, and after these plants had grown about 10—15 cm high (about 40 days after centrifuging), we found in their root tips chromosome fragments (Fig. 4—6). The root tips of such plants exhibited various cytological abnormalities. The roots very often represented chromosome chimeras. *N. Langsdorffii* has 18 chromosomes. In the root tips of the centrifuged plants we found metaphase plates with 18, 17, 19, 20, 21, 22, 25, 27, 36, and 38 chromosomes (Fig. 4—6). The numbers given include both the whole

chromosomes and the chromosome fragments. The number 36 represents the double chromosome number of *N. Langsdorffii* and 38 (Fig. 4) represents doubling accompanied with fragmentation.

The principal question that arises here is: How do cells having chromosome fragments and altered chromosomal constitution compare with normal cells in vitality and in frequency of cell division? This is the main question, because if the cells with the new chromosome constitution are not viable, or are viable but have a lower cell division frequency than normal cells, they may be easily suppressed by the normal cells and eliminated at the very beginning of the development of the seedling, so that thereafter only normal roots and shoots will be formed.

Roots representing chromosomal chimeras constitute very favourable material for studying this question. In investigating such roots, we found:

1. Tetraploid cells of *Vicia Faba* which we produced in several instances (at a certain rate and time of centrifuging) have a very low cell division frequency, so that the normal diploid cells gradually supplant the tetraploid ones in the root tips and soon only diploid cells are found at the growing point of the roots. The tetraploids are thus eliminated at a very early stage of development. It may be that the tetraploid cells produced by Krenke (6) in the potato by *Bacterium tumefaciens* were thus supplanted and that this was the reason he did not produce tetraploid shoots and tetraploid plants.

2. The tetraploid cells of *Nicotiana Langsdorffii* which we produced in several instances, apparently have approximately the same cell division frequency as normal cells, because we found root chimera with $2n$ and $4n$ areas, in which the diploid area gradually decreases toward the end of the root, while the tetraploid area increases so much that at the tip of the root only tetraploid cells are found. This indicates that in certain cases tetraploid roots and perhaps shoots can be produced by centrifuging. The tetraploid cells produced in tomato by Kostoff and Kendall (5) by *Bacterium tumefaciens* and decapitation similarly supplanted the diploid ones in certain instances so that tetraploid shoots were produced.

3. Cells having chromosome fragments, extra chromosomes, and extra chromosomes and fragments are usually viable and may have the same cell division frequency as normal diploid cells, because the very tips of the root-chimeras are very often made up of cells having the altered chromosomal constitution.

The reported above makes it very clear that Stubbe's „mutations“ (9) produced by centrifuging together with various chemicals were obviously due chiefly to chromosomal aberrations (4).

Special centrifuging experiments are established to state whether the gravitation is a factor that causes chromosomal alterations in nature. A more detailed account of these investigations will be given later elsewhere.

We are greatly indebted to Academicians N. I. Vavilov, A. A. Richter, and V. N. Lubimenko, who created conditions that made this investigation possible. We wish to express our best thanks to our laboratory assistants, A. D. Tichonova and N. A. Dogadkina for their aid throughout the present investigations.

We are especially indebted to Academician D. S. Roždestvenskij for helpful criticism.

Institute of Genetics,
Academy of Sciences of the USSR.
Leningrad.

Received
1. II. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

[1] A. F. Blakeslee, Journ. Heredity, 25, 81—108, 1934. [2] A. F. Blakeslee, Proc. 6th Inter. Congr. Genet., vol. I, p. 104—120, 1932. [3] D. Kostoff, Protoplasma, 11, 177—183, 1930. [4] D. Kostoff, Publ. Dep. Agr. Sofia, No 42, 1—45, 1931, [5] D. Kostoff and J. Kendall, Gartenbauwiss., 9, 20—44, 1934. [6] N. Krenke, Phänogen. Variab., Bd. II, p. 173—268, 1933. [7] G. Lewitsky and M. Sizova, C. R. Acad. Sci. URSS, vol. IV, 84—87, 1934. [8] M. Navashin, Amer. Natur., vol. 65 1931. [9] H. Stubbe, Z. I. A. V., Bd. 56, 1930.

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

В. И. ЦИВИНСКИЙ

О ВЛИЯНИИ ПЛОДОНОШЕНИЯ НА ТРАНСПИРАЦИЮ

(*Представлено академиком А. А. Рихтером 21 II 1935*)

Изучая процесс транспирации хлопчатника в течение ряда лет, мы обратили внимание на депрессию транспирации, которая особенно ярко выступает от бутонизации к цветению. Уменьшение транспирации в этот момент не могло быть обусловлено меньшим напряжением метеорологических элементов, так как напряженность их к этому времени не изменялась или же, наоборот, как это имело место в опыте 1933 г., даже возрастала (3).

При сравнении водного дефицита листьев периода бутонизации с периодом цветения, оказалось, что дефицит воды листьев в бутонизацию был больше, чем в цветение и в последующие стадии развития.

В этот момент хлопчатник поливался водою гораздо обильнее, чем в бутонизацию (схема полива 1—3—1), поэтому водного дефицита в период цветения вряд ли можно было и ожидать. Многочисленные определения концентрации клеточного сока листьев хлопчатника рефрактометром Аббе-Цейсса показали, что периоды бутонизации и цветения по величине концентрации клеточного сока между собою не отличаются.

Следовательно, ни водный дефицит листьев, ни концентрация клеточного сока в данном случае не могли оказать влияния на резкое понижение транспирации.

Между тем, снижение транспирации в этот момент достигает значительной величины, в особенности в опыте 1933 г. — на 35% и даже на 50% против бутонизации.

Явление депрессии транспирации по вегетационному ходу, обнаруженное нами у хлопчатника, не укладывается в рамки объяснений регулирования транспирации Ливингстоном, Максимовым, Толмачевым и др. Поэтому причины, вызывающие резкое снижение транспирации в период цветения, мы склонны искать главным образом в глубоких изменениях, происходящих в растении в связи с переходом в репродуктивную стадию.

В целях выяснения регулирующей роли цветения и плодоношения в транспирационном процессе в 1934 г. был поставлен специальный опыт с хлопчатником и клещевиной.

В поле было высеяно два сорта хлопчатника: Навроцкий, Колхозник 8517 и хозяйственный сорт клещевины. Когда растения подросли, одну часть растений оставили развиваться нормально, а у другой части растений бутоны с момента их появлений удалялись на протяжении всего лета через каждые 2—3 дня. Уход за растениями был обычный для хлопчатника. Поливы производились по схеме 2—4—1, так же и для клещевины.

Таблица 1—Table 1

Транспирация на 100 г свежего веса
Transpiration per 100 Grams of Raw Weight

Название подопытных растений Name of experimental plant	Число и месяц Date	Стадия Stage	Нормальный—Normal				Кастрированный—Castrated				Примечание—Notes
			8	10	13	16	8	10	13	16	
Навроцкий—Navrotsky	15 VII	Бутонизация Budding	70.6	85.9	114.0	132.9	67.0	84.3	115.6	127.2	
%	„		100	100	100	100	95.8	98.3	101.5	96.5	
8517	„		37.5	102.7	120.5	116.5	42.8	102.1	121.8	121.5	Ясно, ветра нет
%	„		100	100	100	100	114.2	99.7	101.0	104.3	Clear; no wind
Температура воздуха Temperature of the air	„		25.9	29.4	31.8	35.1	25.9	29 4	31.8	35.1	
Психрометрическая разность Psychrometric difference	„		4.4	7.9	8.3	10.4	4.4	7.9	8.3	10.4	
Навроцкий—Navrotsky	21 VIII	Плодоношение Fruiting		66.3	75.6	75.8		71.5	99.0	83.8	
%	„			100	100	100		108.1	130.6	110.2	Ясно, ветра нет Растения цветут
8517	„			40.8	63.8	75.6		54.6	84.5	84 4	с 20 VII; на растении
%	„			100	100	100		133.8	132.5	110.5	12 коробочек
Температура воздуха Temperature of the air	„			26.0	30.7	32.1		26.0	30.7	32.1	Clear, no wind; the plants had been flowering since
Психрометрическая разность Psychrometric difference	„			5.4	7.8	9.3		5.4	7.8	9.3	july 20; 12 bolls per plant
Клещевина—Castor-oil plant	22 VII	Плодоношение Fruiting		73.8	77.3	65.6		92.3	113.0	109.6	
%	„			100	100	100		125.0	146.2	164.4	
Температура воздуха Temperature of the air	„			27.4	32.0	31.2		27.4	32.0	31.2	Ясно, ветра нет Clear; no wind
Психрометрическая разность Psychrometric difference	„			5.0	8.0	9.6		5.0	8.0	9.6	

Таблица 2—Table 2

Дневной ход транспирации, устьичного аппарата и содержания воды в листьях нормальных и кастрированных растений хлопчатника сорта Навроцкий. 26 VII 1934

The Diurnal Variation of Transpiration, State of the Stomatal Apparatus, and Water Content in Leaves of Normal and Castrated Plants of the Navrotsky Variety of the Cotton Plant. August 26, 1934.

Часы наблюдений Hours of observation	Нормальный Normal				Кастрированный Castrated					Температура воздуха Temperature of the air	Психрометрическая разность Psychrometric difference	Примечание Notes
	Скорость розовения хлор-кобальтовой бумажки в сек Rate per second of cobalt chloride paper turning pink	Транспирационный индекс Transpiration index	Общая величность отверстости устьиц Total openness of the stomata	% воды от сырого веса Water in percentage of raw weight	Скорость розовения хлор-кобальтовой бумажки в сек. Rate per second of cobalt chloride paper turning pink	Транспирационный индекс Transpiration index	Транспирация в отношении норм. Transpiration as compared with normal	Общая величность отверстости устьиц Total openness of the stomata	% воды от сырого веса Water in percentage of raw weight			
8	91.7	5.4	7.5	74.4	71.0	7.0	130	8.7	73.8	19.2	3.7	
9	69.5	7.2	11.0	74.0	40.7	12.3	171	17.7	73.4	24.2	5.9	
10	57.0	8.8	18.0	73.8	35.5	14.0	159	31.0	72.7	29.1	6.1	
11	40.5	12.3	40.0	72.6	32.7	15.3	124	43.0	72.0	29.8	6.4	
12	37.5	13.3	48.5	71.8	30.7	15.8	119	45.8	71.2	30.2	7.2	
13	37.5	13.3	51.0	70.5	31.0	16.0	120	48.3	71.4	32.5	7.9	
14	36.7	13.6	48.3	68.7	33.1	15.1	111	43.3	71.6	32.8	9.4	
15	38.0	13.0	44.5	69.5	29.5	16.9	124	42.8	71.6	33.4	9.6	
16	38.7	12.9	43.0	69.5	28.2	17.7	130	41.0	70.6	32.5	9.4	
17	38.9	12.8	19.1	70.8	28.5	17.5	137	19.3	69.5	32.0	9.0	
18	41.5	12.0	12.0	70.8	37.2	13.4	112	10.0	69.8	30.8	6.8	
19	54.0	9.2	1.2	71.8	43.2	11.4	125	1.5	70.0	26.3	2.1	
20	—	—	0.0	72.9	—	—	—	0.0	72.8	—	—	Ясно; ветра нет Clear; no wind

Определение транспирации производили весовым методом [1] на срезанных растениях и методом хлоркобальтовой бумажки по Ливингстону в разработке Ничипоровича [2] в четырехкратной повторности в разное время дня и сезона. В случае применения весового метода перед самым моментом определения транспирации все коробочки с растения срезались, чтобы исключить влияние их при пересчете транспирации на 100 г сырого веса. Во время бутонизации нормальные и кастрированные растения хлопчатника по величине своей транспирации ничем между собой не различаются (см. табл. 1). Это можно было ожидать на основании материала прежних лет наших работ по транспирации, которыми была обнаружена депрессия именно в период цветения [3].

3 VIII на нормальных растениях было 2—3 цветка, 21 VIII на растениях были цветы и коробочки.

Начиная с цветения и дальше, кастрированные растения во всех случаях дают высшую величину транспирации, чем нормальные растения. Различия достигают до 33.8%. Те же соотношения получились и для клещевины. Еще более резкое различие в транспирации между нормальными и кастрированными растениями получалось при определении транспирации методом хлоркобальтовой пробы (см. табл. 2).

В опыте 26 VIII с сортом Навроцкий различия эти колеблются от 11 до 71%, причем разница в транспирации ярче всего видна в первую половину дня. Данные опытов достаточно убедительно показывают влияние плодоношения на транспирацию.

Наряду с определением транспирации определялось состояние устьиц и содержание воды у нормальных и кастрированных растений. Оказалось, что в поведении устьиц и в содержании воды не видно существенных различий, которыми бы можно было объяснить настоящее явление (табл. 2). Если у кастрированных растений сорта Навроцкий в утренние часы устьица немного и шире раскрыты, то все же искать причину большей транспирации их в этом нельзя, потому что у того же сорта начиная с 12 часов дня, как у нормальных, так и кастрированных растений, устьица открыты одинаково. Однако транспирация нормальных растений в этот период времени все же остается значительно ниже, чем у кастрированных. Содержание воды в листьях у обеих групп подопытных растений почти одинаково, у нормальных даже немного выше.

Концентрации клеточного сока, определенные рефрактором Аббе, также мало чем отличались: у сорта Навроцкий нормальные растения имели 14.6% (в пересчете на сахара), а кастрированные 15.2%; сорт № 8517 нормальные растения 13.7%, а кастрированные 15.8%. То есть концентрация клеточного сока кастрированных растений была не только не ниже, как это можно было ожидать, а даже, наоборот, несколько выше.

Следовательно, в наших опытах вопрос о возможном влиянии на ход транспирационного процесса устьиц, воды и концентрации клеточного сока сам собою отпадает. Мы склонны объяснять депрессию транспирации у плодоносящих растений влиянием самого плодообразовательного процесса, так как факт депрессии обнаруживается именно в момент прохождения этой стадии развития, а не ранее.

Работа входит в общий план работ по засухоустойчивости хлопчатника, проводящихся в лаборатории физиологии Центральной селекционной станции НИХИ под руководством профессора В. А. Новикова.

Лаборатория физиологии
Центральной селекционной станции НИХИ.
Ташкент.

Поступило
21 II 1935.

ON THE EFFECT OF FRUITING UPON TRANSPIRATION

By V. I. CIVINSKIJ

(Communicated by A. A. Richter, Member of the Academy, 21. II. 1935)

In our studies of the process of transpiration in the cotton plant extending over a number of years, our attention was attracted by the strongly marked depression in transpiration occurring between the budding and the flowering stage. This depression could not be explained as due to a weakening of the meteorological factors, since their intensity had not begun to decline and, on the contrary, had even increased, as, for instance, during our experiment of 1933 (3).

On comparing the water deficit of the leaves during the budding period with that of the flowering period, it was found that the water deficit of the leaves was greater during budding than during flowering and the following stages of development.

The cotton plant was much more abundantly watered at this time than during the budding stage (watering schedule 1—3—1) so that a water deficit during the flowering stage was hardly to be expected. Numerous measurements of the concentration of the cell sap of cotton leaves made with an Abbe-Zeiss refractometer showed no difference to exist between the periods of budding and flowering as regards the concentration of the cell sap. Consequently, neither the water deficit of the leaves nor the concentration of cell sap could in this case be the cause of a marked fall in transpiration. Still, transpiration decreases considerably during this period. The decrease was especially great in our experiment of 1933, when it attained 35 and even 50% of the amount during budding.

The phenomenon of the depression of transpiration during the vegetative process discovered by us in the cotton plant does not fit in with the explanations of the transpiration process by Livingstone, Maximov, Tolmačev, and others. We are, therefore, inclined to look for the causes of such a marked fall in transpiration during the flowering period in the deep changes that occur in the plant with its transition to the reproductive stage.

A special experiment was carried out in 1934 with the cotton plant and the castor-oil plant to elucidate the regulating role of flowering and fruiting in transpiration.

Two varieties of cotton plant, Navrotsky and Kolkhoznik 8517, and a variety of the castor-oil plant were sown in the field. On the plants reaching the budding stage, one part of them was left to develop normally, and in the other every two or three days during the whole summer all the buds were removed on their appearance. These plants were tended in the usual manner. The watering was according to schedule 2—4—1, both for the cotton plant and the castor-oil plant.

Transpiration was measured by the method of weighing (1) in cut plants and by Livingstone's method of cobalt chloride paper worked out by Ničiporovič (2). Measurements were repeated four times at different times of day and season.

When the weighing method was applied, all the cotton bolls were cut off the plant just before measuring transpiration so as to exclude them from the calculations of transpiration per 100 g of raw weight. During the budding period there was no difference between the amount of transpira-

tion in the normal and castrated plants (see Table 1, p. 77). This was to be expected on the basis of our previosly obtained data on respiration which led to the discovery of depression in the flowering stage ([3]).

On August 3 the normal plants had 2—3 flowers each. On August 21 they had both flowers and bolls.

From the flowering stage onwards, the castrated plants showed in all cases a higher rate of transpiration than the normal ones. The difference amounted up to 33.8 per cent. The same correlation was to be observed in the castor-oil plant.

A still more marked difference between the transpiration of normal and castrated plants was revealed by measurements made by the cobalt chloride method (see Table 2, p. 78).

In the experiment of August 26 with the Navrotsky variety these differences range from 11 to 71 per cent, being most marked in the forenoon. The experimental data convincingly show the effect of fruiting on transpiration. Simultaneously with measurements of transpiration, the state of the stomata and the water content were recorded for both normal aud castrated plants. No marked differences that could account for the discussed phenomenon (Table 2) were to be observed in the behaviour of the stomata and in the water content. Although the stomata in the castrated plants of the Navrotsky variety are somewhat more open in the morning hours. this fact cannot account for the greater transpiration, for after 12 a. m, the stomata are as open in the normal as in the castrated plants of this variety. Nevertheless, the transpiration in normal plants at this time of the day continues to be considerably lower than that in castrated ones. The water content in the leaves of both groups of the experimental plants is almost identical. It is even a little higher in the normal plants.

The concentrations of the cell sap measured by the Abbe refractometer also differ but little: normal plants of the Navrotsky variety had 14.6% (referred to sugar), and castrated ones had 15.2%; while normal plants of variety № 8517 had 13.7% and castrated ones 15.8%. Thus, the sap concentration of castrated plants was not lower, as could have been expected, but, on the contrary, even somewhat higher.

Consequently, the influence of stomata, water, and sap concentration on the transpiration process is out of the question. We are inclined to explain the depression of transpiration in fruiting plants by the influence of the fruiting process itself, for the depression occurs just at the time when the plant passes through this stage of growth and not before.

This work is included in the general plan of work on the drought resistance of the cotton plant which is being carried out by the Physiological Laboratory of the Central Plant Breeding Station of the Cotton Plant Institute under the guidance of Prof. V. A. Novikov.

Physiological Laboratory,
Central Plant Breeding Station,
Cotton Plant Institute.
Tashkent.

Received
21. II.1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

[1] А. А. Рихтер и Н. Д. Страхов, Журн. оп. агр. Ю.-Востока, т. VII, в. I. A. A. Richter and N. D. Strachov, Journ. Exp. Agr. S.-East, vol. VII, fasc. I. [2] А. А. Ничипорович, Журн. оп. агр. Ю.-Востока, т. III, в. 2. A. A. Ničiporovič, Journ. Exp. Agr. S.-East, vol. III, fasc. 2. [3] В. И. Цивинский. Засухоустойчивость и скороспелость хлопчатника, изд. САОГИЗ, Ташкент. V. I. Civinskij. Drought Resistance and Early Ripening of Cotton Plant, Tashkent.

ЗООЛОГИЯ

Н. И. КАЛАБУХОВ

ФИЗИОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ГОРНЫХ И РАВНИННЫХ ПОДВИДОВ ЛЕСНОЙ МЫШИ (*APODEMUS SYLVATICUS CISCAUCASICUS* OGN. и *A. S. MOSQUENSIS* OGN.)

(Представлено академиком С. А. Зерновым 20 II 1935)

1. Введение

Изучение влияния горного климата на организм человека показало что при подъеме в горы в крови увеличивается содержание гемоглобина и число эритроцитов (1).

Также было установлено, что у горных животных [ящерицы (6), яки (5)] и туземцев высокогорных районов (1, 2) эти показатели выше, чем у равнинных форм.

Но эти исследования оставили открытым один крайне интересный биологический вопрос — о характере этих отличий у равнинных и горных животных. Исследование крови людей при подъеме в горы показало, что наблюдаемое увеличение количества гемоглобина и эритроцитов является лишь временной адаптацией. При возвращении на уровень моря эти показатели понижались до прежнего предела (1).

Зависят ли отличия в составе крови у горных животных также от непосредственного действия внешней среды или они стойко закреплены в процессе индивидуального развития, оставалось неизвестным.

Для решения этого вопроса было необходимо переместить горных животных на равнину. Опыт подобного рода, проведенный с ящерицами (6), показал, что это перемещение вызвало у горных *Lacerta vivipara L.* в течение 4—6 недель уменьшение числа эритроцитов от 148 200 до 138 200 (в среднем). Так как этот единственный опыт не исключал иных возможностей, в частности, полной независимости физиологических признаков горных животных от внешней среды, Лаборатория экологии поставила своей задачей провести ряд исследований по этому вопросу. В этой статье излагаются результаты опытов с горными и равнинными лесными мышами (*Apodemus sylvaticus ciscaucasicus* Ogn. и *A. s. mosquensis* Ogn.), проведенные в 1934 г.

2. Методика исследования

Горные мыши (*Apodemus sylvaticus ciscaucasicus* Ogn.) ловились на высоте 1600—1300 м, в Гондорайском ущелье, на северном склоне Главного Кавказского хребта. Исследования производились на туристической базе Московского дома ученых.

Опыты велись с взрослыми мышами (средний вес тела в различные периоды исследования от 18 до 23 г). Кровь бралась из хвоста. Определялись: 1) содержание гемоглобина (колориметром Лейтца), 2) число эритроцитов (в камере Бюркера-Тюрка) и 3) размер эритроцитов (измерения на мазках).

Часть мышей после исследования убивалась, часть (12 экземпляров) были перевезены в Москву. Равнинные мыши (*A. s. mosquensis* Ogn.) ловились в окрестностях Москвы. Часть из них также исследовалась повторно и содержалась в одинаковых условиях с горными.

Эти исследования были выполнены благодаря вниманию к этой теме заведующего лабораторией В. В. Алпатова и вследствие предоставления места для работы в горном лагере Президиумом туристического кружка Московского дома ученых.

Р. И. Лаврентьевой и В. М. Родионову автор выражает свою благодарность за выполнение большой работы по измерению и подсчету числа эритроцитов.

3. Результаты исследования

Было установлено определенное отличие в содержании гемоглобина и количестве эритроцитов у горных и равнинных грызунов (см. табл. 1).

Таблица 1—Table 1

Содержание гемоглобина и число эритроцитов у *Apodemus sylvaticus mosquensis* Ogn. (Москва) и *A. s. ciscaucasicus* Ogn. (Гондарай)

Haemoglobin Content and Number of Erythrocytes in *Apodemus sylvaticus mosquensis* Ogn. and *A. s. ciscaucasicus* Ogn.

Группа Subspecies	Hb в % по Sahli Haemoglobin content		Число эритроцитов на 1 мм³ крови Number of erythrocytes (per 1 mm³ of blood)	
	Число исследованных мышей Number of mice investigated	*M*	Число исследованных мышей Number of mice investigated	*M*
1. *Apodemus sylvaticus mosquensis* Ogn. (Moscow)	16	104.8	31	9183064
2. *Apodemus sylvaticus ciscaucasicus* Ogn. (North Caucasus)	16	111.6	32	9601531
	В % по сравнению с равнинными % in relation to plain mice	106.3	В % по сравнению с равнинными % in relation to plain mice	104.5

Это различие выражается не только средними величинами, но и распределением отдельных наблюдений в вариационном ряду. Биометрическая обработка материала позволяет с уверенностью говорить о достоверности этих результатов.

В противоположность этому, размер эритроцитов у обеих форм почти одинаков; средняя величина площади одного эритроцита для равнинных мышей равна 27.13 μ^2 (на основании измерений 1050 эритроцитов от 19 мышей), а для горных — 27.35 μ^2 (из 1750 измерений от 28 мышей). Следовательно повышение содержания гемоглобина у горных мышей обусловлено исключительно изменением числа эритроцитов.

Установив эту разницу в содержании гемоглобина и числе эритроцитов у горных и равнинных *Apodemys sylvaticus*, мы произвели опыт выяснения зависимости этих признаков от действия внешней среды. 12 экземпляров *Apodemus sylvaticus* (из числа исследованных в горах 32 экземпляров) после предварительного двукратного исследования в Гондорае были в конце августа перевезены в Москву. В сентябре одновременно с ними были помещены 12 экземпляров московских лесных мышей. Соотношение полов, возраст и условия содержания у обоих подвидов были одинаковы. Раз в месяц производилось исследование крови (из хвоста).

В этих исследованиях во всех случаях определялось число и размер эритроцитов как факторы, непосредственно влияющие на изменение количества гемоглобина ([3]). Непосредственное определение количества производилось лишь в ряде случаев.

Полученные данные приведены на табл. 2.

Таблица 2—Table 2

Изменение числа эритроцитов у горных и равнинных лесных мышей в условиях неволи

Change in the Number of Erythrocytes of Mountain and Plain Mice in Captivity

Место и период исследования Place and time of investigation		Гондорай, 1600 м North Caucasus 1660 m		Москва Moscow			
		5—14 VIII 1934	17—27 VIII 1934	8—14 IX 1934	1—15 X 1934	14—23 XI 1934	19—27 XII 1934
1. *Apodemus sylvaticus mosquensis* Ogn.	Абсол. . . . . Absolute number	—	—	—	9344000	9228000	9289000
	В % первого исследования . . . % in relation to first investigation	—	—	—	100.0	98.7	99.4
2. *Apodemus sylvaticus ciscaucasicus* Ogn.	Абсол. . . . . Absolute number	9851777	9898833	9726600	9585000	9976340	10265450
	В % по отношению к равнинным . . % in relation to plain mice	105.4	105.9	104.0	102.9	106.7	109.8

Эти данные говорят о том, что в то время как содержание в горах в течение месяца не повлияло на число эритроцитов у горных мышей, перемещение их в условиях равнины вызвало в начале уменьшение количества кровяных телец. Но затем, через 2 месяца после перевоза зверьков с гор, число эритроцитов снова вернулось к прежнему уровню и даже несколько превысило прежние показатели.

У равнинных лесных мышей (*A. s. mosquensis*), несмотря на одинаковые условия содержания, число эритроцитов оставалось на прежнем уровне (98.7—99.4%).

Этот факт уменьшения числа эритроцитов в первое время и возвращения к прежней норме в ноябре—декабре подтвержден наблюдениями за изменением количества гемоглобина у ряда грызунов (табл. 3).

Таблица 3—Table 3

Изменение количества гемоглобина у горных мышей (в % по Сали)
Change of the Haemoglobin Content in Mountain Mice in Captivity

№	Дата Date				
	7 VIII	10—14 IX	5—9 X	15—17 XI	19—26 XII
10	—	106	98	97	107
12	137	—	113	112	128
16	—	104	100	—	108
41	—	110	106	—	—

Таким образом несмотря на понижение показателей в первое время после перевоза с гор, различия в содержании гемоглобина и количестве эритроцитов у горных лесных мышей оказались стойкими. Несколько большее число эритроцитов у горных мышей в ноябре — декабре по сравнению с первыми исследованиями в горах объясняется тем, что число кровяных телец возрастает по возрасту (4).

Оставляя пока открытым вопрос о причинах временного понижения этих показателей в первый период, мы можем с уверенностью сказать, что организм горных животных имеет ряд физиологических особенностей, не зависящих от действия внешней среды и явившихся видимо следствием адаптации и отбора в течение процесса филогенеза. Эти отличия могут временно под воздействием резкого изменения обстановки несколько сглаживаться, но затем снова возвращаются к прежним пределам. Поэтому, физиологические особенности горных форм могут характеризовать их наравне с морфологическими признаками.

Данные наших опытов ставят под сомнение выводы Рихтера (6), который мог захватить своими исследованиями (4—6 недель после перевоза с гор) только период временного уменьшения числа эритроцитов. Эта возможность тем более вероятна, что и в опытах Рихтера уменьшение числа эритроцитов у горных ящериц не дошло до уровня, характерного для равнинных *Lacerta vivipara L.* (138 200 вместо 139700—134200). Данные Баркрофта (1) о том, что и на больших высотах содержание гемоглобина и эритроцитов в крови туземцев было выше, чем у европейцев, живших в горах несколько лет (в среднем 7.5 млн. вместо 6.3—6 млн.), также говорят об определенной стойкости этих различий.

Все заставляет притти к выводу о том, что физиологические признаки могут быть весьма характерными и константными для горных животных.

Закреплены ли эти признаки наследственно или они являются результатом развития организма в определенных условиях внешней среды, должны решить дальнейшие исследования.

Лаборатория экологии
Института зоологии Московского
государственного университета.

Поступило
20 II 1935.

THE PHYSIOLOGICAL PECULIARITIES OF THE MOUNTAIN AND PLAIN SUBSPECIES OF THE FOREST MOUSE (*APODEMUS SYLVATICUS CISCAUCASICUS* OGN. AND *A. S. MOSQUENSIS* OGN., *RODENTIA*)

By N. J. KALABUCHOV

(*Communicated by S. A. Zernov, Member of the Academy, 20. II. 1935*)

1. Introduction

The study of the action of a mountain climate upon the human organism [1] has shown that an ascent into mountains increases the haemoglobin content and the erythrocyte number in the blood.

It has been ascertained also that in the blood of the mountain animals [lizards [6], yaks [5]] and in the blood of aborigenes of high altitudes [1, 2] their values are higher than in the animals from the plains.

However, these researches have left open an exceedingly interesting biological question: the nature of these differences in the animals of the plains and in those of the mountains.

The investigations of human blood during an ascent into mountains had shown that the increase of haemoglobin and the number of erythrocytes is but a temporary adaptation [1]. On returning to the sea-level, the haemoglobin content and the number of erythrocytes fall again to their former level.

Whether such a difference in the composition of the blood of mountain animals is due to the direct action of the environment or whether it has become stably fixed in the process of individual or phylogenic development, remained unknown.

In order to elucidate this question, it would be necessary to transfer mountain animals to the plains. So far no experiments of this kind has been made, either with human beings or with other mammals. The only recorded experiment has been that of Richter [6] with lizards. The transfer of the mountain *Lacerta vivipara* to the plains caused a decrease in the number of erythrocytes from 14 820 to 13 820 on an average in the course of 4—6 weeks. These experiments did not exclude other possibilities. To be specific, they did not exclude the possibility of a complete independence of the physiological characters of mountain animals from the environment.

The Laboratory of Oecology undertook a series of experiments for the purpose of solving this problem.

The experiments upon mountain and plain forest mice (*Apodemus sylvaticus ciscaucasicus* Ogn. and *A. s. mosquenis* Ogn.) were made in 1934.

2. Method of Investigation

Mountain mice (*A. s. ciscaucasicus* Ogn.) were caught at an altitude of 1500 to 1800 metres on the northern slope of the main chain of the Caucasus (Gondorai Canyon). Adult mice were chosen for experimentation (mean weight of body at different periods of investigation, from 18 to 23 g).

Blood was taken from the tail. Determinations were made 1) of the haemoglobin content (by means of a Leitz colorimeter), 2) of the number of erythrocytes (in the Bürker-Turck chamber), and 3) of the size of the erythrocytes (measurements on smears). Altogether 32 specimens of mountain mice were investigated, and 12 of them were brought to Moscow and several times subjected to investigation. Mice of the plains (*A. s. mosquensis* Ogn.) were caught in the environs of Moscow. Some of them were kept in captivity in the same conditions as the moutain mice.

3. Results of the Investigation

A distinct difference was established in the haemoglobin content and in the number of erythrocytes of the mointain and plains rodents (see Table 1, p. 83). This difference is shown not only by the mean values, but likewise by the distribution of individual observations in the variation series. The size of the erythrocytes in both forms is almost the same, the mean size of one erythrocyte surface (πR^2) being equal to 27.13 μ^2 (according to the measurement of 1050 erythrocytes from 19 mice) for *A. s. mosquensis*, and 27.35 μ^2 (according to 1750 measurements of erythrocytes from 28 mice) for mountain mice. Thus, the increase of the haemoglobin content in mountain mice is chiefly due to the change in the number of erythrocytes.

Having established this difference in the blood composition of the rodents of the mountains and those of the plains, we proceeded with our experiments, bringing 12 individuals of mountain mice to Moscow. Two preliminary investigations of their blood were made in the mountains. At the end of September 12 individuals of plains mice were put together with them, the proportions as regards the sex and the age of the animals being the same. The blood investigation was made once a month. The data obtaned are given in Table 2 (p. 84). We see that a transfer of the rodents into the conditions of the plain produced at first a decrease in the number of their red blood cells. But later on, two months after the transfer of the animals from the mountains, the number of erythrocytes again returned to its former level and even rose somewhat above it. At the same time, in the mice of the plains (*A. s. mosquensis*) placed in identical conditions, the number of erythrocytes remained on its former level (98.7—99.4 % as compared with the first investigation). This diminution in the number of erythrocytes occurring at the beginning and its subsequent return to the former level in November—December is confirmed by observations of the haemoglobin content in individual animals (see Table 3, p. 85).

In this way, in spite of a fall of the haemoglobin content and the number of erythrocytes at first after the animals had been brought from the mountains, the difference in the haemoglobin content as well as in the number of erythrocytes has proved to be a stable one.

Considering for the moment the question as to the causes of the temporary fall of these magnitudes in the first period to be still an open one, we can affirm with perfect assurance that the organism of mountain animals possesses a number of physiological peculiarities independent of the environment.

Our experiments throw some doubt on the experiments of Richter [6], who conducted his researches 4—6 weeks after the transfer from the mountains. It is possible that it was a period of a temporary decrease in the number of the blood corpuscles. This is all the more probable, since in Rich-

ter's experiments the decrease in the number of erythrocytes in mountain lizards did not reach the level characteristic of *Lacerta vivipara* of the plains (138 200 instead of 139 700—134 200). The data of Barcroft [1] show that at high altitudes the haemoglobin content and the number of erythrocytes in the blood of the Indian natives are higher than in that of Europeans who have lived for several years in the mountains (7.5 millions on an average instead of 6.3—6.4 millions) and, therefore, speak in favour of a definite stability in these characters.

These data enable us to infer that physiological characters can be specific and constant for mountain animals. The question whether these characters are hereditary or whether they result from the development of the organism under certain environmental conditions is to be solved by further investigations.

Laboratory of Oecology,
Institute of Zoology,
Moscow University.

Received
20. II. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

[1] J. Barcroft. The Respiratory Function of the Blood. Pt. I, Lessons from High Altitudes. Cambridge, 1925. [2] A Hurtado, Amer. J. Physiol., vol. 100, № 3, 1932. [3] N. Kalabuchov, ZS. f. Zellforsch. u. mikrosk. Anat., Bd. 17, H. I, 1933. [4] N. Kalabuchov and W. Rodionov, Fol. Haematol., vol. 52, p. 145, 1934. [5] Ф. Кожарин и Г. Самохвалова, Биол. Журн., т. III, № 3, 1934. F. Kožarin and G. Samochvalova, Biol. Journ. (Russian), vol. III, № 3, 1934. [6] R. Richter, Zool. Jahrb., Abt. Zool. und Physiol., Bd. 52, H. 3, 1933. [7] I. Weiss, ZS. f. physiol. Chem., vol. 22, 1896/97, p. 526. [8] H. Wismer, Biologia generalis, Bd. X, Lief. I, 1934.

Доклады Академии Наук СССР
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS

МАТЕМАТИКА

М. КРАВЧУК, Академик ВУАН

ОБ ОДНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ В ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

Пусть $p(x)$ есть неотрицательная функция, у которой существуют моменты

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, x^k\, dx. \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n+1) \qquad (1)$$

Как известно, тогда существуют положительные числа

$$\begin{gathered} A \\ B,\ B_1 \\ C,\ C_1,\ C_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ R,\ R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_{n-2},\ R_{n-1} \\ S,\ S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_{n-1},\ S_n \end{gathered} \qquad (2)$$

и вещественные числа

$$\begin{gathered} \alpha \\ \beta,\ \beta_1 \\ \gamma,\ \gamma_1,\ \gamma_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_{n-2},\ \rho_{n-1} \\ \sigma,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_{n-1},\ \sigma_n, \end{gathered} \qquad (3)$$

удовлетворяющие неравенствам:

$$\begin{gathered} \beta < \beta_1 \\ \gamma < \gamma_1 < \gamma_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho < \rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_{n-2} < \rho_{n-1} \\ \sigma < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_{n-1} < \sigma_n \end{gathered} \qquad (4)$$

и равенствам:

$$m_k = A\alpha^k \qquad (k = 0, 1) \qquad (5)$$

$$m_k = B\beta^k + B_1\beta_1{}^k \qquad (k = 0, 1, 2, 3) \qquad (5_1)$$

$$m_k = C\gamma^k + C_1\gamma_1{}^k + C_2\gamma_2{}^k \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5) \qquad (5_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_k = R\rho^k + R_1\rho_1{}^k + R_2\rho_2{}^k + \ldots + R_{n-1}\rho_{n-1}^k \qquad (5_{n-1})$$
$$(k = 0, 1, \ldots, 2n-1)$$

$$m_k = S\sigma^k + S_1\sigma_1{}^k + S_2\sigma_2{}^k + \ldots + S_{n-1}\sigma_{n-1}^k + S_n\sigma_n{}^k. \qquad (5_n)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, 2n, 2n+1)$$

В этой заметке решается вопрос: в какой мере моменты (1) определяются коэффициентами (2)?

Легкое вычисление показывает, что замена функции $p(x)$ на

$$|a| \cdot p(ax+b),$$

при надлежащем подборе параметров a и b, дает возможность приписать моментам

$$m_0,\ m_1,\ m_2 \tag{6}$$

любые числовые значения, удовлетворяющие, разумеется, неравенствам:

$$m_0 > 0, \quad \begin{vmatrix} m_0 & m_1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} > 0;$$

при этом числа (2) не изменяются.

Итак, можем считать моменты (6) данными. Тогда равенства (5) и (5_1) однозначно определяют числа α, β и β_1:

$$\alpha = \frac{m_1}{A}, \quad m_0\beta = m_1 - \sqrt{\frac{B_1}{B}\cdot\begin{vmatrix} m_0 & m_1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}}, \quad m_0\beta_1 = m_1 + \sqrt{\frac{\beta}{\beta_1}\cdot\begin{vmatrix} m_0 & m_1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}}.$$

Предположив теперь данными моменты

$$m_0,\ m_1,\ \ldots,\ m_{2n-1}, \qquad (n>1) \tag{7}$$

покажем, что $2n$ первых равенств (5_n) однозначно определяют числа

$$\sigma,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_{n-1},\ \sigma_n.$$

Переписав названные равенства в виде:

$$S_1\sigma_1^k + S_2\sigma_2^k + \ldots + S_n\sigma_n^k = m_k - S\sigma^k, \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1) \tag{8}$$

заметим, прежде всего, что при любом изменении вещественного числа σ в пределах

$$-\infty < \sigma < \rho \tag{9}$$

и при неизменном S все числа S_i остаются положительными, а числа σ_i действительными с сохранением неравенств

$$\rho < \sigma_1 < \rho_1 < \sigma_2 < \ldots < \rho_{n-1} < \sigma_n. \tag{10}$$

Следовательно, при существовании двух различных значений числа σ:

$$\sigma = \sigma' \quad \text{и} \quad \sigma = \sigma''$$

мы должны были бы притти к следующему заключению: оставляя в равенстве (8) неизменным число S и изменяя σ в пределах от σ' до σ'', необходимо получим в некоторой точке

$$\sigma = \sigma_0 \tag{11}$$

равенство:

$$\frac{dS_n}{d\sigma} = 0. \tag{12}$$

Не уменьшая общности рассуждений, можем положить

$$\sigma_0 = 0.$$

Далее, дифференцируя по σ равенства (8), легко найдем:

$$\left(\frac{dS_n}{d\sigma}\right)_{\sigma=0} = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\partial \Delta_1}{\partial \sigma_n}, \tag{13}$$

где

$$\Delta = (-1)^n \cdot \prod (\sigma_i - \sigma_j)^4, \qquad (i > j) \tag{14}$$

$$\Delta_1 = \sigma_n (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^2 \left(\frac{2}{\sigma_1} + \frac{2}{\sigma_2} + \dots + \frac{2}{\sigma_{n-1}} + \frac{1}{\sigma_n}\right) \times \times \prod_{k=1}^{n-1} (\sigma_n - \sigma_k)^2 \cdot \prod (\sigma_i - \sigma_j)^4. \qquad (i > j) \tag{15}$$

Тогда из равенства (12) вытекает, что

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial \sigma_n} = 0.$$

Между тем это невозможно. В самом деле, рассматривая последнее равенство как уравнение относительно σ_n, видим, что его корни распределены следующим образом: а) $n-1$ корней

$$\sigma_1, \ \sigma_2, \dots, \ \sigma_{n-1}$$

есть двойные корни многочлена Δ_1, b) остальные $n-1$ корней чередуются с корнями многочлена Δ_1, т. е. лежат в интервалах между числами:

$$\frac{1}{2\left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \dots + \frac{1}{\sigma_{n-1}}\right)}, \quad \sigma_1, \ \sigma_2, \dots, \ \sigma_{n-1}.$$

Итак предположение, что

$$\sigma' \neq \sigma'',$$

невозможно. Тогда равенства (8) однозначно определяют числа

$$\sigma_1, \ \sigma_2, \dots, \ \sigma_{n-1},$$

а следовательно и моменты m_{2n} и m_{2n+1}.

Назвав коэффициенты [см. (2)]

$$R, \ R_1, \ R_2, \dots, \ R_{n-1}$$

кристоффелевыми числами n-го порядка характеристической функции $p(x)$, приходим к следующим результатам:

I. Если соответствующие кристоффелевы числа первых, вторых, ..., n-ых порядков двух неотрицательных функций $p(x)$ и $q(x)$ равны, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \cdot x^k \, dx = |a| \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} q(ax+b) \cdot x^k \, dx, \qquad (k = 0, 1, \dots, 2n-1)$$

где a и b надлежаще выбранные числа.

II. Если все соответствующие кристоффелевы числа функций $p(x)$ и $q(x)$ попарно равны, то существуют такие числа a и b, что

$$\int_{-\infty}^{x} p(x) \, dx = |a| \cdot \int_{-\infty}^{x} q(ax+b) \, dx$$

для всякого вещественного значения переменного x.

Поступило
27 II 1935.

SUR UNE QUESTION ALGÉBRIQUE DANS LE PROBLÈME DES MOMENTS

Par M. KRAVČUK (KRAWTCHOUK),

membre de l'Académie des Sciences de l'Ukraine

RÉSUMÉ

Soit $p(x)$ une fonction non négative quelconque, ayant les moments:

$$m_k[p] = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, x^k\, dx. \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1) \qquad (1)$$

Elle détermine les nombres positifs:

$$\begin{gathered} A[p] \\ B[p],\ B_1[p] \\ C[p],\ C_1[p],\ C_2[p] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R[p],\ R_1[p], \ldots,\ R_{n-1}[p] \\ S[p],\ S_1[p], \ldots,\ S_{n-1}[p],\ S_n[p] \end{gathered} \qquad (2)$$

et les nombres réels:

$$\begin{gathered} \alpha[p] \\ \beta[p],\ \beta_1[p] \\ \gamma[p],\ \gamma_1[p],\ \gamma_2[p] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho[p],\ \rho_1[p], \ldots,\ \rho_{n-1}[p] \\ \sigma[p],\ \sigma_1[p], \ldots,\ \sigma_{n-1}[p],\ \sigma_n[p] \end{gathered} \qquad (3)$$

qui satisfont aux inégalités:

$$\begin{gathered} \beta[p] < \beta_1[p] \\ \gamma[p] < \gamma_1[p] < \gamma_2[p] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho[p] < \rho_1[p] < \ldots < \rho_{n-1}[p] \\ \sigma[p] < \sigma_1[p] < \ldots < \sigma_{n-1}[p] < \sigma_n[p] \end{gathered} \qquad (4)$$

et aux égalités suivantes bien connues:

$$m_k[p] = A[p]\,\alpha^k[p], \qquad (k=0,1) \tag{5}$$

$$m_k[p] = B[p]\,\beta^k[p] + B_1[p]\,\beta_1{}^k[p] \qquad (k=0,1,2,3) \tag{5$_1$}$$

$$m_k[p] = C[p]\,\gamma^k[p] + C_1[p]\,\gamma_1{}^k[p] + C_2[p]\,\gamma_2{}^k[p] \qquad (k=0,1,2,3,4,5) \tag{5$_2$}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$m_k[p] = R[p]\,\rho^k[p] + R_1[p]\,\rho_1{}^k[p] + \ldots + R_{n-1}[p]\,\rho_{n-1}^k[p] \qquad (k=0,1,2,\ldots,2n-1) \tag{5$_{n-1}$}$$

$$m_k[p] = S[p]\,\sigma^k[p] + S_1[p]\,\sigma_1{}^k[p] + \ldots + S_{n-1}[p]\,\sigma_{n-1}^k[p] + S_n[p]\,\sigma_n{}^k[p]. \qquad (k=0,1,2,\ldots,2n,2n-1) \tag{5$_n$}$$

On a les théorèmes:

I. Si les fonctions non négatives $p(x)$ et $q(x)$ satisfont aux conditions

$$A[p] = A[q]$$

$$B[p] = B[q],\ B_1[p] = B_1[q]$$

$$C[p] = C[q],\ C_1[p] = C_1[q],\ C_2[p] = C_2[q] \tag{6}$$

. . . . . .

$$R[p] = R[q],\ R_1[p] = R_1[q], \ldots,\ R_{n-1}[p] = R_{n-1}[q],$$

alors on a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,x^k\,dx = |a| \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} q(ax+b)\,x^k\,dx, \qquad (k=0,1,\ldots,2n-1)$$

où

$$a = \pm\sqrt{\frac{m_0[q]\,m_2[q] - m_1{}^2[q]}{m_0[p]\,m_2[p] - m_1{}^2[p]}},$$

$$b = \frac{m_1[q]}{m_0[q]} - \frac{m_1[p]}{m_0[p]}\sqrt{\frac{m_0[q]\,m_2[q] - m_1{}^2[q]}{m_0[p]\,m_2[p] - m_1{}^2[p]}}.$$

II. Si les égalités (6) *sont vraies pour toutes les valeurs de l'indice n, alors*

$$\int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx = |a| \cdot \int_{-\infty}^{x} q(ax+b)\,dx,$$

quel que soit le nombre réel x.

Manuscrit reçu
le 27. II. 1935.

МАТЕМАТИКА

А. И. ПОПОВ

О РАЗЛИЧНЫХ РЯДАХ

(*Представлено академиком И. М. Виноградовым 29 I 1935*)

Обозначения: $M(n)$ — число представлений целого числа n формой

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

отрицательного определителя — D; $N_\alpha(n)$ — число разложений n на сумму α квадратов, где α произвольное комплексное число (1).

Нам придется пользоваться известным разрывным интегралом Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}\frac{e^{st}}{t^{\nu}}\,dt=\frac{s^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \qquad \text{при} \qquad s>0;\ =0 \ \text{при}\ s<0. \tag{1}$$

Здесь $R(\nu)>0$; $c>0$.

Точно также будем применять несколько видоизмененный интеграл Сонина (2) для изображения функции Бесселя первого рода при

$$R(\nu)>-1;\quad c>0;$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}\frac{\exp\left(\pi t-\frac{\pi nx}{t}\right)}{t^{\nu+1}}\,dt=\frac{J_\nu(2\pi\sqrt{nx})}{(nx)^{\frac{\nu}{2}}}. \tag{2}$$

Заметим, что (2) легко получить с помощью (1), разлагая $\exp\left(-\frac{\pi nx}{t}\right)$ по степеням $\frac{1}{t}$ и применяя интеграл Коши.

1°. Рассмотрим формулу преобразования некоторого θ-ряда, например, простейшего:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi n^2 z}=\frac{1}{\sqrt{z}}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\pi n^2}{z}}. \tag{3}$$

Из равенства (3) и ему подобных можно получить формулы преобразования с разнообразными коэффициентами при степенях $e^{-\pi z}$ и $e^{-\frac{\pi}{z}}$. Так, возвысив (3) в степень α, найдем

$$1+\sum_1^\infty N_\alpha(n)\cdot e^{-\pi nz}=\frac{1}{z^{\frac{\alpha}{2}}}\cdot\left[1+\sum_1^\infty N_\alpha(n)\cdot e^{-\frac{\pi n}{z}}\right]. \tag{4}$$

Без всяких затруднений получим также из (3) следующее равенство:

$$1+\sum_1^\infty M(n)e^{-\pi nz}=\frac{1}{z\sqrt{D}}\cdot\left\{1+\sum_1^\infty M(n)\,e^{-\frac{\pi n}{Dz}}\right\}. \tag{5}$$

Формула (5) при мнимом аргументе была использована К. Петром в доказательстве формул Дирихле для числа классов бинарных форм отрицательного определителя ([3]). Совершенно очевидно, что, подобным же образом, из (3) или других формул преобразования θ-рядов, перемножением их, возвышением в различные степени, изменением аргументов, сочетанием этих действий и пр., можно получить сколько угодно новых формул преобразования, аналогичных (4) и (5) и содержащих, в качестве коэффициентов, разнообразные арифметические функции. Если коэффициенты эти ограничены некоторыми условиями (в смысле возрастания), то к соответствующим формулам будет применимо, после умножения на надлежаще выбранного множителя, интегрирование по вертикали и, стало быть, интеграл (1) Коши и (2) Сонина. Можно применять и другие интегральные операции. Положив, например, в (4): $z=\frac{t}{x}$ и умножив на

$$e^{\pi t}\cdot t^{-\nu}\cdot dt,$$

интегрируем по вертикали, считая вещественную часть переменного t положительной. После применения интегралов Коши и Сонина найдем формулы (1) и (2) уже упомянутой нашей статьи ([1]). Таким же путем из (5) извлекаем равенство, справедливое при $R(\nu)\geqslant 1$:

$$\frac{\pi^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\left[x^{\nu-1}+\sum_{n\leqslant x}{}'(x-n)^{\nu-1}\cdot M(n)\right]=\frac{\pi^{\nu}x^{\nu}}{\sqrt{D}\cdot\Gamma(\nu+1)}+ \\ +x^{\frac{\nu}{2}}\cdot D^{\frac{\nu-1}{2}}\cdot\sum_{1}^{\infty}\frac{M(n)}{n^{\frac{\nu}{2}}}J_{\nu}\left(2\pi\sqrt{\frac{nx}{D}}\right). \tag{6}$$

Для $\nu=1$ отсюда выходит результат, доказанный нами совершенно иначе в другом месте ([4]), именно,

$$1+\sum_{n\leqslant x}{}'M(n)=\frac{\pi x}{\sqrt{D}}+\sqrt{x}\cdot\sum_{1}^{\infty}\frac{M(n)}{\sqrt{n}}J_1\left(2\pi\sqrt{\frac{nx}{D}}\right). \tag{7}$$

Метод упомянутой нашей статьи ([4]) пригоден и для форм положительного определителя [там указан только пример формы xy, для которой $M(n)$ есть $\tau(n)$, т. е., число делителей n ([5])].

2°. Отметим попутно еще формулу, где $R(\nu)\geqslant\frac{1}{2}$,

$$\frac{\pi^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\cdot\left[x^{2\nu-1}+2\sum_{n\leqslant x}{}'(x^2-n^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos 2\pi nz\right]=x^{\nu}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\frac{J_{\nu}\{2\pi(z+n)x\}}{(z+n)^{\nu}}; \tag{8}$$

отсюда можно получить заслуживающие внимания результаты. Частные случаи этой формулы находим в известных монографиях Нильсен ([6]) и Ватсон ([2]) по цилиндрическим функциям.

Ленинградский индустриальный институт.

Поступило
29 I 1935.

MATHEMATIK

ÜBER EINIGE REIHEN

Von A. I. POPOV

(*Vorgelegt von I. M. Vinogradow, Mitglied der Akademie, d. 29. I. 1935*)

ZUSAMMENFASSUNG

Mit Hilfe der Integralen von Cauchy und Sonin [Formeln (1) und (2) des russischen Textes], sowie der Transformationen der θ-Reihen [Formeln (3—5)] erhält der Verfasser die Summationsformeln, die in den Beziehungen (6), (7), (8) angegeben sind.

Die Bezeichnungen sind z. T. allgemein gebräuchlich, z. T. sind sie den früheren Arbeiten des Verfassers entnommen. Letztere stehen weiter unten als ([1, 4, 7]).

Industrielles Institut.
Leningrad.

Eingegangen
d. 29. I. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] А. И. Попов, ИМЕН, 1934, № 6. [2] Watson. A Treatise on the Theory of Bessel Functions, p. 177. [3] K. Petr, Sitz.-Ber. Böhm. Ges. Wiss. Prag, 1907. [4] А. И. Попов, ДАН, 1934, IV, № 5-6. [5] Voronoï, Ann. Ec. Norm., 1904. [6] N. Nielsen. Handbuch d. Theorie d. Zylinderfunktionen. [7] А. И. Попов, ДАН, 1934, IV, № 7. A. I. Popov, C. R. Acad. Sci. URSS, IV, № 7.

МАТЕМАТИКА

А. И. ПОПОВ

О РЯДАХ, СОДЕРЖАЩИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

(*Представлено академиком И. М. Виноградовым 29 I 1935*)

1°. Из равенств, указанных в одной из работ автора ([1]), вытекают, как легко видеть, общие формулы суммирования, аналогичные той, которую содержит соотношение (3) одной из цитированных наших статей ([2]). Отсюда можно извлечь ряд новых результатов. В частности, если положить в равенстве (3) статьи ([2]):

$$f(x)=x^{\frac{\nu-1}{2}}\cdot\frac{K_\mu(2\pi\sqrt{a}\sqrt{x+z})}{(x+z)^{\frac{\mu}{2}}};\qquad a>0,\ z>0, \tag{1}$$

то, очевидным образом, выполняется как условие существования предела

$$\lim_{x=0}\frac{f(x)}{x^{\frac{\nu-1}{2}}}=\frac{K_\mu(2\pi\sqrt{az})}{z^{\frac{\mu}{2}}},$$

так и другие ограничения, достаточные для применения данной сумматорной формулы. Поэтому, пользуясь видоизмененным интегралом Сонина ([3]), в котором $R(\nu)>0$, а $f(x)$ определяется равенством (1):

$$\pi\int_0^{\infty} J_{\nu-1}(2\pi\sqrt{nx})f(x)\,dx=\frac{n^{\frac{\nu-1}{2}}}{a^{\frac{\mu}{2}}}\frac{(a+n)^{\frac{\mu-\nu}{2}}}{z^{\frac{\mu-\nu}{2}}}K_{\nu-\mu}(2\pi\sqrt{z}\sqrt{a+n}), \tag{2}$$

найдем такой ряд

$$a^{\frac{\mu}{2}}z^{\frac{\mu-\nu}{2}}\left\{\frac{K_\mu(2\pi\sqrt{az})}{z^{\frac{\mu}{2}}}+\sum_1^{\infty}N_{\xi\nu}(n)\frac{K_\mu(2\pi\sqrt{a}\sqrt{n+z})}{(n+z)^{\frac{\mu}{2}}}\right\}=\frac{K_{\nu-\mu}(2\pi\sqrt{za})}{a^{\frac{\nu-\mu}{2}}}+$$

$$+\sum_1^{\infty}\frac{N_{2\nu}(n)}{(a+n)^{\frac{\nu-\mu}{2}}}K_{\nu-\mu}(2\pi\sqrt{z}\sqrt{a+n}). \tag{3}$$

При $\mu=\frac{1}{2}$, $\nu=1$, отсюда вытекает результат (2) нашей заметки „О некоторых рядах“ ([4]).

Применение аналогичного рассуждения к получаемой из (7) статьи „О различных рядах“ ([1]) сумматорной формуле

$$f(0)+\sum_1^{\infty}M(n)f(n)=\frac{\pi}{\sqrt{D}}\int_0^{\infty}f(x)\,dx+$$

$$+\frac{\pi}{\sqrt{D}}\sum_1^{\infty}M(n)\int_0^{\infty}f(x)\,J_0\left(2\pi\sqrt{\frac{nx}{D}}\right)dx \tag{4}$$

дает ряд

$$q^{\frac{\mu}{2}}\left\{\frac{K_\mu\left(2\pi\sqrt{\frac{qz}{D}}\right)}{z^{\frac{\mu}{2}}}+\sum_1^{\infty}M(n)\frac{K_\mu\left(2\pi\sqrt{\frac{q}{D}}\cdot\sqrt{n+z}\right)}{(z+n)^{\frac{\mu}{2}}}\right\}=$$

$$=z^{\frac{1-\mu}{2}}\left\{\frac{K_{1-\mu}\left(2\pi\sqrt{\frac{zq}{D}}\right)}{q^{\frac{1-\mu}{2}}}+\sum_1^{\infty}\frac{M(n)K_{1-\mu}\left(2\pi\sqrt{\frac{z}{D}}\cdot\sqrt{n+q}\right)}{(q+n)^{\frac{1-\mu}{2}}}\right\}. \tag{5}$$

Эта формула выведена Н. С. Кошляковым другим путем ([5]).

При

$$\mu=\frac{1}{2}\quad\text{и}\quad M(n)=N_2(n),$$

равенство (5) дает, как и (3), ряд (2) нашей заметки ([4]); как видно из упомянутой статьи Н. С. Кошлякова, он принадлежит Рамануджану.

2°. Рассуждая подобным образом, получим ряд, где

$$R(\nu)>0, \qquad x>0:$$

$$\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}\pi^{\frac{\alpha}{2}+\nu}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\nu\right)}\cdot\left[\frac{\Gamma(\nu)}{\pi^{\nu}}+2x^{\frac{\nu}{2}}\sum_{1}^{\infty}n^{\frac{\nu}{2}}N_{\alpha}(n)K_{\nu}(2\pi\sqrt{nx})\right]=$$

$$=1+x^{\frac{\alpha}{2}+\nu}\sum_{1}^{\infty}\frac{N_{\alpha}(n)}{(n+x)^{\frac{\alpha}{2}+\nu}}; \tag{6a}$$

как частный случай отсюда находим ряд (1) нашей статьи ([3]), а также соотношение

$$\frac{\pi^{\nu+\frac{1}{2}}x}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\cdot\left[\frac{\Gamma(n)}{\pi^{\nu}}+4x^{\nu}\sum_{1}^{\infty}n^{\nu}K_{\nu}(2\pi nx)\right]=1+2x^{2\nu+1}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}. \tag{7}$$

Соответственно, из (4) вытекает результат, в котором

$$R(\nu)>0:$$

$$\frac{\Gamma(1+\nu)}{\pi^{1+\nu}}\left\{1+x^{\nu+1}\sum_{1}^{\infty}\frac{M(n)}{(n+x)^{\nu+1}}\right\}=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{D}}\left\{\frac{\Gamma(\nu)}{\pi^{\nu}}+2\left(\frac{x}{D}\right)^{\frac{\nu}{2}}\sum_{1}^{\infty}M(n)n^{\frac{\nu}{2}}K_{\nu}\left(2\pi\sqrt{\frac{nx}{D}}\right)\right\}. \tag{8}$$

При $\nu=\frac{1}{2}$ отсюда получается формула Харди ([6]), доказанная другим способом Н. С. Кошляковым ([5]):

$$\frac{\sqrt{D}}{2\pi x}\left\{1+x^{3/2}\sum_{1}^{\infty}\frac{M(n)}{(n+x)^{3/2}}\right\}=1+\sum_{1}^{\infty}M(n)e^{-2\pi\sqrt{\frac{nx}{D}}}. \tag{9}$$

3°. К иному типу относится ряд, имеющий место при

$$R(\nu)>0, \qquad \alpha\geqslant\beta>0$$

[взяты коэффициенты $N_2(n)$]:

$$\frac{2\pi}{(\alpha-\beta)^{\nu}}\sum_{1}^{\infty}N_2(n)I_{\nu}\left(2\pi\frac{\sqrt{n\alpha}-\sqrt{n\beta}}{2}\right)K_{\nu}\left(2\pi\frac{\sqrt{n\alpha}+\sqrt{n\beta}}{2}\right)=$$

$$=\frac{\nu-\pi\sqrt{\alpha\beta}}{\nu\cdot\sqrt{\alpha\beta}\cdot(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^{2\nu}}+\sum_{1}^{\infty}\frac{N_2(n)}{\sqrt{n+\alpha}\cdot\sqrt{n+\beta}}\frac{1}{(\sqrt{n+\alpha}+\sqrt{n+\beta})^{2\nu}}. \tag{10}$$

При $\alpha=\beta$, $\nu=\frac{1}{2}$, найдем ряд, который содержится в (9) и в равенстве (1) нашей статьи (4) ($\alpha>0$, $\beta>0$):

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}}-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\sum_{1}^{\infty}N_2(n)\left(\frac{1}{\sqrt{n+\beta}}-\frac{1}{\sqrt{n+\alpha}}\right)=2\pi(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})+ \\ +\sum_{1}^{\infty}\frac{N_2(n)}{\sqrt{n}}\left(e^{-2\pi\sqrt{n\beta}}-e^{-2\pi\sqrt{n\alpha}}\right). \tag{11}$$

4°. В заключение сделаем несколько замечаний.

a) Существует много способов получения рядов указанных типов: применение рядов Дирихле, θ-рядов, формул суммирования и тригонометрических рядов и пр. Все эти способы по существу эквивалентны. Во многих случаях наиболее удобны θ-ряды.

b) Интересные („укороченные“) формулы суммирования могут быть получены из таких результатов, как равенство (6) нашей статьи (2).

c) При применении подобных рядов к изучению арифметических функций могут быть употребляемы некоторые суммы, заменяющие интегралы в обычной теории моментов. Впрочем, соответствующие интегралы также можно вывести.

Ленинградский индустриальный институт.

Поступило
29 I 1935.

MATHEMATIK

ÜBER DIE ZYLINDRISCHE FUNKTIONEN ENTHALTENDEN REIHEN

Von A. I. POPOV

(*Vorgelegt von I. M. Vinogradow, Mitglied der Akademie, d. 29. I. 1935*)

ZUSAMMENFASSUNG

Auf Grund der Ergebnisse seiner Arbeiten (1, 2, 4) leitet Verf. verschiedenartige Reihen ab, welche zylindrische Funktionen $J_\nu(z)$ und $K_\nu(z)$ enthalten.

Diese Reihen sind in den Gleichungen (3) ,(5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), in voranstehenden russischen Text angegeben und bilden z. T. neue Resultate, z. T. sind sie von den Arbeiten Hardy's, Ramanujan's u. a. m. her bekannt.

Im Paragraphen 4 sind einige allgemeine Bemerkungen über Ableitungsverfahren sowie über weitere Anwendungen von solchen Reihen zu finden.

Industrielles Institut.
Leningrad.

Eingegangen
d. 29. I. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

1 А. И. Попов, ДАН, 1935, II, № 2, 94. A. I. Popov, C. R. Acad. Sci. URSS, 1935, II, № 2, 96. 2 А. И. Попов, ИМЕН, 1934, № 6. A. I. Popov, Bull. Acad. Sci. URSS, 1934, № 6. 3 N. J. Sonin, Mathem. Ann., 1880, XVI. 4 А. И. Попов, ДАН, 1934, т. IV, № 7. A. I. Popov, C. R. Acad. Sci. URSS, v. IV, № 7. 5 Н. С. Кошляков, ДАН, 1934, т. III, № 8-9. N. S. Košliakov, C. R. Acad. Sci. URSS, 1934, v. III, № 8-9. 6 Hardy, Quarterly Journ., 1914.

В. Д. КУПРАДЗЕ

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ В СТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

(*Представлено академиком А. Н. Крыловым 7 II 1935*)

Эта теорема сводится к доказательству следующего предложения: *Такое решение* $(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$ *системы колебательных уравнений*

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\varphi} + s_1^2\bar{\varphi} &= 0, \quad \operatorname{rot}\bar{\varphi} = 0, \\ \Delta\bar{\psi} + s_2^2\bar{\psi} &= 0, \quad \operatorname{div}\bar{\psi} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

которое a) *на контуре* (γ) *области, простирающейся в бесконечность, удовлетворяет условию*

$$[\bar{\varphi} + \bar{\psi}]_{(\gamma)} = 0, \tag{1'}$$

b) *на бесконечности*

$$\int_0^{2\pi} \underset{R\to\infty}{(\sqrt{R}\,\bar{\varphi})}\, d\alpha \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} \underset{R\to\infty}{(\sqrt{R}\,\bar{\psi})}\, d\alpha \tag{2}$$

остаются ограниченными и c) *удовлетворяют обобщенному принципу излучения*

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} \sqrt{R}\left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial l} + is_1\bar{\varphi}\cos(R,l)\right) &= 0, \\ \lim_{R\to\infty} \sqrt{R}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial l} + is_2\bar{\psi}\cos(R,l)\right) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

есть тождественный ноль.

Поясним обозначения: R радиус окружности (Σ) с центром в точке (x_0, y_0), находящейся в конечной части плоскости, вне контура (γ); l произвольное направление из точек окружности (Σ).

Известно, что основные волновые уравнения теории упругости имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\varphi}_1 = a^2\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial t^2}; \qquad & \Delta\bar{\psi} = b^2\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial t^2}, \\ \operatorname{rot}\bar{\varphi}_1 = 0 \qquad & \operatorname{div}\bar{\psi}_2 = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$a^2 = \frac{\rho}{\mu}, \qquad b^2 = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu},$$

ρ плотность, λ, μ упругие константы среды; полагая в (4)

$$\varphi_1 = \Re\,(e^{i\omega t}\bar{\varphi}), \qquad \psi_1 = \Re\,(e^{i\omega t}\bar{\psi}), \tag{5}$$

приходим к (1).

Обозначим через Ω область, ограниченную контуром (γ) и окружностью (Σ) достаточно большого радиуса с центром в точке (x_0, y_0), обозначим кроме того составляющие $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ через $(\varphi_1^x, \varphi_1^y)$, (ψ_1^x, ψ_1^y) и т. д. и через E полную энергию деформированного упругого тела.

Тогда нетрудно показать, что

$$\frac{d}{dt}\int\int_{\Omega} E\,d\sigma = -\int_{\gamma+\Sigma}\Big\{\lambda\Big[\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1{}^x+\psi_1{}^x)\cos(nx)+ \\ +\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1{}^y+\psi_1{}^y)\cos(ny)\Big]\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1{}^x+\psi_1{}^x)+\lambda\Big[\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1{}^x+\psi_1{}^x)\cos(nx)+ \\ +\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1{}^y+\psi_1{}^y)\cos(ny)\Big]\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_1{}^y+\psi_1{}^y)+\mu\Big[\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1{}^x+\psi_1{}^x)\cos(nx)+ \\ +\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1{}^y+\psi_1{}^y)\cos(ny)\Big]\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1{}^x+\psi_1{}^x)+\mu\Big[\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_1{}^x+\psi_1{}^x)\cos(nx)+ \\ +\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_1{}^y+\psi_1{}^y)\cos(ny)\Big]\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1{}^y+\psi_1{}^y)+\mu\Big[\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1{}^x+\psi_1{}^x)\frac{\partial}{\partial n}(\varphi_1{}^x+\psi_1{}^x)+ \\ +\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1{}^y+\psi_1{}^y)\frac{\partial}{\partial n}(\varphi_1{}^y+\psi_1{}^y)\Big]\Big\}\,ds. \tag{6}$$

Пусть

$$\overline{\varphi}=\overline{p}+i\overline{q},\quad \overline{\psi}=\overline{p}^*+i\,\overline{q}^*;\quad \overline{\varphi}(\varphi_x,\varphi_y),\quad \overline{\psi}(\psi_x,\psi_y),\quad \overline{p}(p_x,p_y),\quad \overline{q}(q_x,q_y);$$

тогда согласно с (5) будем иметь:

$$\varphi_1{}^x=p_x\cos\omega t+q_x\sin\omega t,\quad \varphi_1{}^y=p_y\cos\omega t+q_y\sin\omega t, \\ \psi_1{}^x=p_x{}^*\cos\omega t+q_x{}^*\sin\omega t,\quad \psi_1{}^y=p_y{}^*\cos\omega t+q_y{}^*\sin\omega t. \tag{7}$$

Подставляя эти значения запаздывающих потенциалов в (6), мы заметим что интеграл по (γ) обратится в ноль по условию (1′). Что касается интеграла по (Σ), то он преобразуется с помощью формул (3), которые должны быть написаны в терминах $p_x, q_x, p_x{}^*, q_x{}^*, p_y, q_y, p_y{}^*, q_y{}^*$.

При этом достаточно длинные, но совершенно элементарные преобразования показывают, что подинтегральное выражение принимает вид

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}a_{ij}\,x_i\,x_j, \tag{8}$$

где:

$$a_{11}=\omega\lambda s_1+\mu\omega s_1\sec^2(nx),\quad a_{22}=\mu\omega s_2,\quad a_{33}=\omega\lambda s_1+\mu\omega s_2\sec^2(nx), \\ a_{44}=\mu\omega s_2,\ a_{12}=a_{21}=\frac{1}{2}\left[\omega\lambda s_1+(\omega\mu s_1+\omega\mu s_2)(1+\sec^2(nx))\right],\ a_{13}=a_{31}=\omega\lambda s_1, \\ a_{23}=a_{32}=\frac{1}{2}\,\omega\,(\lambda s_1+\mu s_1+\mu s_2),\quad a_{14}=a_{41}=\frac{1}{2}\,\omega\,(\lambda s_1+\mu s_1+\mu s_2), \\ a_{24}=a_{42}=\omega\mu s_2,\quad a_{34}=a_{43}=\frac{1}{2}\,\omega\left[\lambda s_1+(\mu s_1+\mu s_2)(1+\sec^2(ny))\right], \\ x_1=(q_x\cos\omega t-p_x\sin\omega t)\cos(nx),\quad x_2=(q_x{}^*\cos\omega t-p_x{}^*\sin\omega t)\cos(nx), \\ x_3=(q_y\cos\omega t-p_y\sin\omega t)\cos(ny),\quad x_4=(q_y{}^*\cos\omega t-p_y{}^*\sin\omega t)\cos(ny).$$

Составляя характеристическое уравнение для формы (8), находим что все его корни вещественны и положительны.

Поэтому из (6), приняв во внимание, что

$$\int_0^{2\pi} (\sqrt{R}\, p_x)_{R\to\infty} d\alpha = 0; \ldots \int_0^{2\pi} (\sqrt{R}\, q_y^*)_{R\to\infty} d\alpha = 0,$$

имеем:

$$\frac{d}{dt} \iint_{(\Omega)} E\, d\sigma = -\int_{(\Sigma)} \sum_{i=1}^{4} \lambda_i x_i^2\, ds. \qquad (\lambda_i > 0).$$

Отсюда мы заключаем, что $x_i \equiv 0$ и следовательно:

$$(\sqrt{R}\, p_x) = 0, \quad (\sqrt{R}\, p_y) = 0, \quad (\sqrt{R}\, p_x^*) = 0, \quad (\sqrt{R}\, p_y^*) = 0,$$
$$(\sqrt{R}\, q_x) = 0, \quad (\sqrt{R}\, q_y) = 0, \quad (\sqrt{R}\, p_x^*) = 0, \quad (\sqrt{R}\, q_y^*) = 0,$$

таким образом на бесконечности имеем

$$(\sqrt{R}\, \overline{\varphi}_{R\to\infty} = 0), \quad (\sqrt{R}\, \overline{\psi}_{R\to\infty}) = 0. \tag{9}$$

Но такое решение колебательного уравнения, которое удовлетворяет (3) и (9), как это было нами показано в заметке „О принципе излучения" А. Зоммерфельда (ДАН, 1934, т. I, № 2), есть тождественный ноль.

Таким образом высказанное в начале настоящей заметки предложение доказано полностью.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
7 II 1935.

MATHEMATISCHE PHYSIK

DAS EINDEUTIGKEITSTHEOREM IN DEN RANDWERTAUFGABEN DER STATIONAREN ELASTIZITÄTSTHEORIE

Von V. D. KUPRADZE

(*Vorgelegt von A. N. Krylov, Mitglied der Akademie, d. 7. II. 1935*)

Dieses Theorem besteht im Beweise des folgenden Satzes:
Eine Lösung $(\overline{\varphi}, \overline{\psi},)$ *des Systems von Schwingungsgleichungen*

$$\begin{aligned} \Delta\overline{\varphi} + s_1^2\, \overline{\varphi} = 0, \quad \operatorname{rot} \overline{\varphi} = 0, \\ \Delta\overline{\psi} + s_2^2\, \overline{\psi} = 0, \quad \operatorname{div} \overline{\psi} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

welche a) am Rand (γ) *eines sich ins Unendliche erstreckenden Bereiches der Bedingung*

$$[\overline{\varphi} + \overline{\psi}]_{(\gamma)} = 0, \tag{1'}$$

genügt, b) bei der ferner die Integrale

$$\int_0^{2\pi} (\sqrt{R}\, \overline{\varphi})_{R\to\infty} d\alpha; \quad \int_0^{2\pi} (\sqrt{R}\, \overline{\psi})_{R\to\infty} d\alpha, \tag{2}$$

im Unendlichen beschränkt bleiben, und c) die dem verallgemeinerten Ausstrahlungsprinzip

$$\lim_{R\to\infty}\sqrt{R}\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial l}+is_1\overline{\varphi}\cos(R,l)\right)=0,$$
$$\lim_{R\to\infty}\sqrt{R}\left(\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial l}+is_2\overline{\psi}\cos(R,l)\right)=0 \tag{3}$$

genügt, ist Null identisch.

Hier bedeuten: R den Radius eines genügend grossen Kreises (Σ) mit dem endlichen Mittelpunkt (x_0, y_0), der ausserhalb der Berandung (γ) liegt, und l eine beliebige Richtung, die von irgend einem Punkte des Kreises (Σ) ausgeht.

Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie lauten bekanntlich folgendermassen:

$$\Delta\overline{\varphi}_1=a^2\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial t^2};\quad \Delta\overline{\psi}=b^2\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial t^2},\quad \operatorname{rot}\overline{\varphi}_1=0,\quad \operatorname{div}\overline{\psi}_2=0, \tag{4}$$

worin

$$a^2=\frac{\rho}{\mu},\quad b^2=\frac{\rho}{\lambda+2\mu},$$

ρ die Dichte, λ und μ die Elastizitätskonstanten des Mediums bedeuten.

Setzt man in (4).

$$\varphi_1=\Re\,(e^{i\omega t}\overline{\varphi}),\quad \psi_1=\Re\,(e^{i\omega t}\overline{\psi}), \tag{5}$$

so gelangt man zu (1).

Es sei Ω ein Bereich, begrenzt durch die Berandung (γ) und den Kreis (Σ) mit genügend grossem Radius und dem Mittelpunkt (x_0, y_0). Bezeichnet man ferner die Komponenten der Vektoren $\overline{\varphi}_1$ und $\overline{\psi}_1$ durch $(\varphi_1^x, \varphi_1^y)$, (ψ_1^x, ψ_1^y) u. s. w. und die Gesamtenergie des deformierten elastischen Körpers durch E, so lässt sich ohne weiteres nachweisen, dass

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\iint_\Omega E\,d\sigma=-\int_{(\gamma+\Sigma)}\Big\{&\lambda\Big[\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1^x+\psi_1^x)\cos(nx)+\\&+\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1^y+\psi_1^y)\cos(ny)\Big]\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1^x+\psi_1^x)+\lambda\Big[\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1^x+\psi_1^x)\cos(nx)+\\&+\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1^y+\psi_1^y)\cos(ny)\Big]\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_1^y+\psi_1^y)+\mu\Big[\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1^x+\psi_1^x)\cos(nx)+\\&+\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_1^y+\psi_1^y)\cos(ny)\Big]\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1^x+\psi_1^x)+\mu\Big[\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_1^x+\psi_1^x)\cos(nx)+\\&+\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_1^y+\psi_1^y)\cos(ny)\Big]\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1^y+\psi_1^y)+\mu\Big[\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1^x+\psi_1^x)\frac{\partial}{\partial n}(\varphi_1^x+\psi_1^x)+\\&+\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1^y+\psi_1^y)\frac{\partial}{\partial n}(\varphi_1^y+\psi_1^y)\Big]\Big\}ds.\end{aligned} \tag{6}$$

Es möge nun

$$\overline{\varphi}=\overline{p}+i\overline{q},\quad \overline{\psi}=\overline{p}^*+i\overline{q}^*;\quad \overline{\varphi}\,(\varphi_x,\varphi_y),\quad \overline{\psi}\,(\psi_x,\psi_y),\quad \overline{p}\,(p_x,p_y),\quad \overline{q}\,(q_x,q_y)$$

sein.

Dann erhalten wir aus (5):

$$\varphi_1^x = p_x \cos \omega t + q_x \sin \omega t, \quad \varphi_1^y = p_y \cos \omega t + q_y \sin \omega t,$$
$$\psi_1^x = p_x^* \cos \omega t + q_x^* \sin \omega t, \quad \psi_1^y = p_y^* \cos \omega t + q_y^* \sin \omega t. \tag{7}$$

Setzt man diese Werte der retardierenden Potentiale in (6) ein, so bemerken wir, dass das Integral längs (γ) sich nach Bedingung (1′) in Null verwandelt. Was dagegen das Integral längs (Σ) anbelangt, so lässt es sich mit Hilfe der Formeln (3), die durch p_x, q_x, p_x^*, q_x^*, p_y, q_y, p_y^*, q_y^* ausgedrückt werden müssen, umformen.

Hierbei zeigen zwar ziemlich umständliche, jedoch ganz elementare Umformungen, dass man für den Integranden folgenden Ausdruck erhält:

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_i x_j, \tag{8}$$

worin

$$a_{11} = \omega s_1 (\lambda + \mu \sec^2 (n x)), \quad a_{22} = \mu \omega s_2, \quad a_{33} = \omega (\lambda s_1 + \mu s_2 \sec^2 (n x)),$$
$$a_{44} = \mu \omega s_2, a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} [\omega \lambda s_1 + (\omega \mu s_1 + \omega \mu s_2) (1 + \sec^2 (n x))], \quad a_{13} = a_{31} = \omega \lambda s_1,$$
$$a_{23} = a_{32} = \frac{1}{2} [\omega \lambda s_1 + \omega \mu s_1 + \omega \mu s_2], \quad a_{14} = a_{41} = \frac{1}{2} (\omega \lambda s_1 + \omega \mu s_1 + \omega \mu s_2),$$
$$a_{24} = a_{42} = \omega \mu s_2, \quad a_{34} = a_{43} = \frac{1}{2} \omega [\lambda s_1 + (\mu s_1 + \mu s_2) (1 + \sec^2 (n y))]$$
$$x_1 = (q_x \cos \omega t - p_x \sin \omega t) \cos (n x), \quad x_2 = (q_x^* \cos \omega t - p_x^* \sin \omega t) \cos (n x),$$
$$x_3 = (q_y \cos \omega t - p_y \sin \omega t) \cos (n y), \quad x_4 = (q_y^* \cos \omega t - p_y^* \sin \omega t) \cos (n y).$$

Wenn wir nun die charakteristische Gleichung für den Integranden (8) bilden, so erkennen wir, dass alle ihre Wurzeln reell und positiv sind.

Man erhält daher aus (6) und unter Berücksichtigung, dass

$$\int_0^{2\pi} (\sqrt{R}\, p_x) \, d\alpha = 0, \ldots \int_0^{2\pi} (\sqrt{R}\, q_y^*) \, d\alpha = 0,$$
$$R \to \infty \qquad\qquad R \to \infty$$

folgendes:

$$\frac{d}{dt} \iint_{(\Omega)} E \, d\sigma = - \int_{(\Sigma)} \sum_{i=1}^{4} \lambda_i x_i^2 \, ds, \qquad (\lambda_i > 0) \tag{}$$

Hieraus schliessen wir, dass $x_i \equiv 0$ und folglich

$$\sqrt{R}\, p_x = 0, \quad \sqrt{R}\, p_y = 0, \quad \sqrt{R}\, p_x^* = 0, \quad \sqrt{R}\, p_y^* = 0,$$
$$\sqrt{R}\, q_x = 0, \quad \sqrt{R}\, q_y = 0, \quad \sqrt{R}\, p_x^* = 0, \quad \sqrt{R}\, q_y^* = 0.$$

Wir erhalten somit im Unendlichen, dass

$$\sqrt{R}\, \overline{\varphi} \underset{R \to \infty}{=} 0, \quad \sqrt{R} \overline{\psi} \underset{R \to \infty}{=} 0. \tag{9}$$

Nun ist aber — wie wir in der Notiz „Über das Ausstrahlungsprinzip von A. Sommerfeld“ (C. R. Acad. Sci. URSS, 1934, v. I, № 2) gezeigt haben, — eine derartige Lösung der Schwingungsgleichung, die (3) und (9) genügt, Null identisch. Somit ist der oben aufgestellte Satz bewiesen.

Stekloffsches mathematisches Institut.
Akademie der Wissenschaften der UdSSR.
Moskau.

Eingegangen
d. 7. II. 1935.